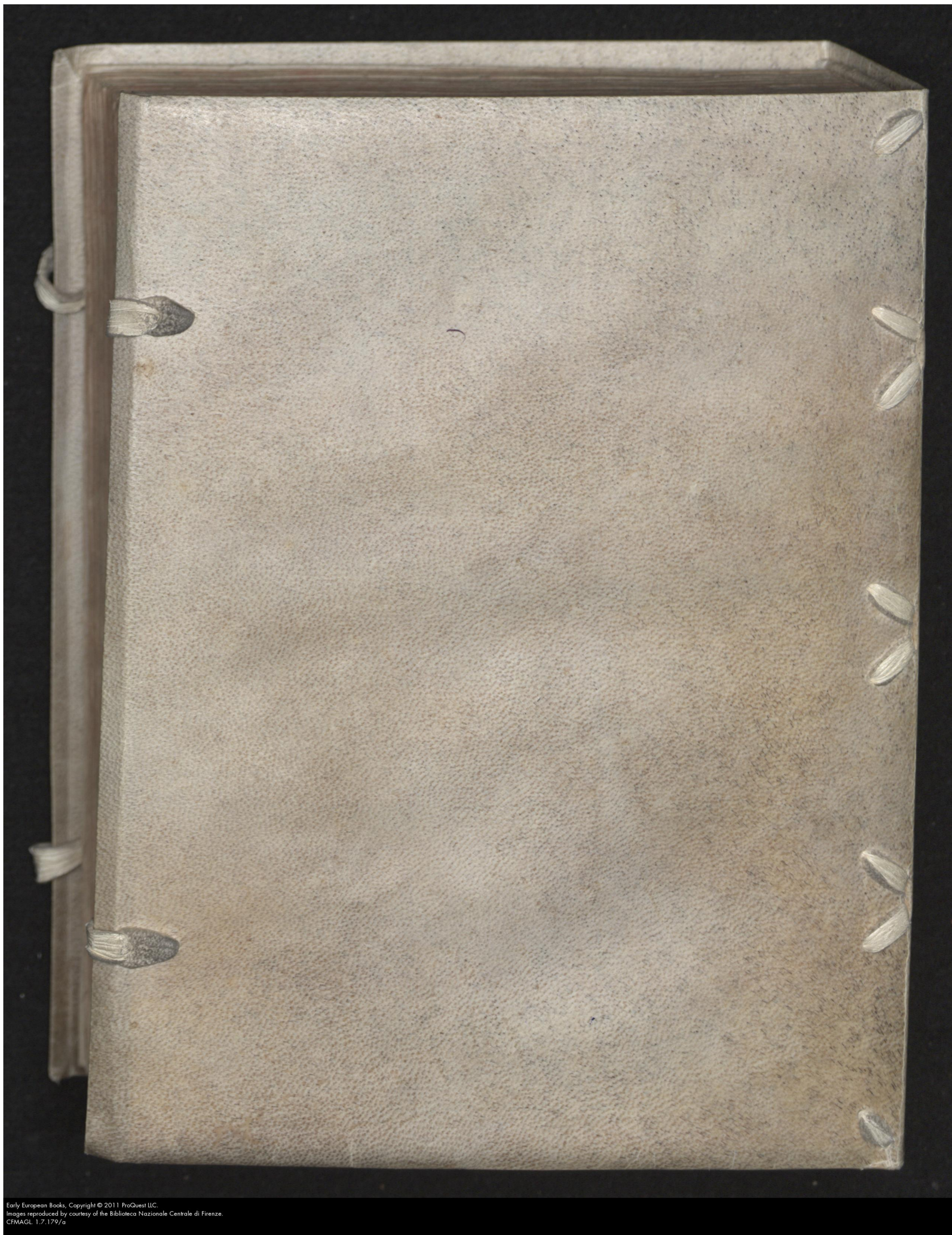
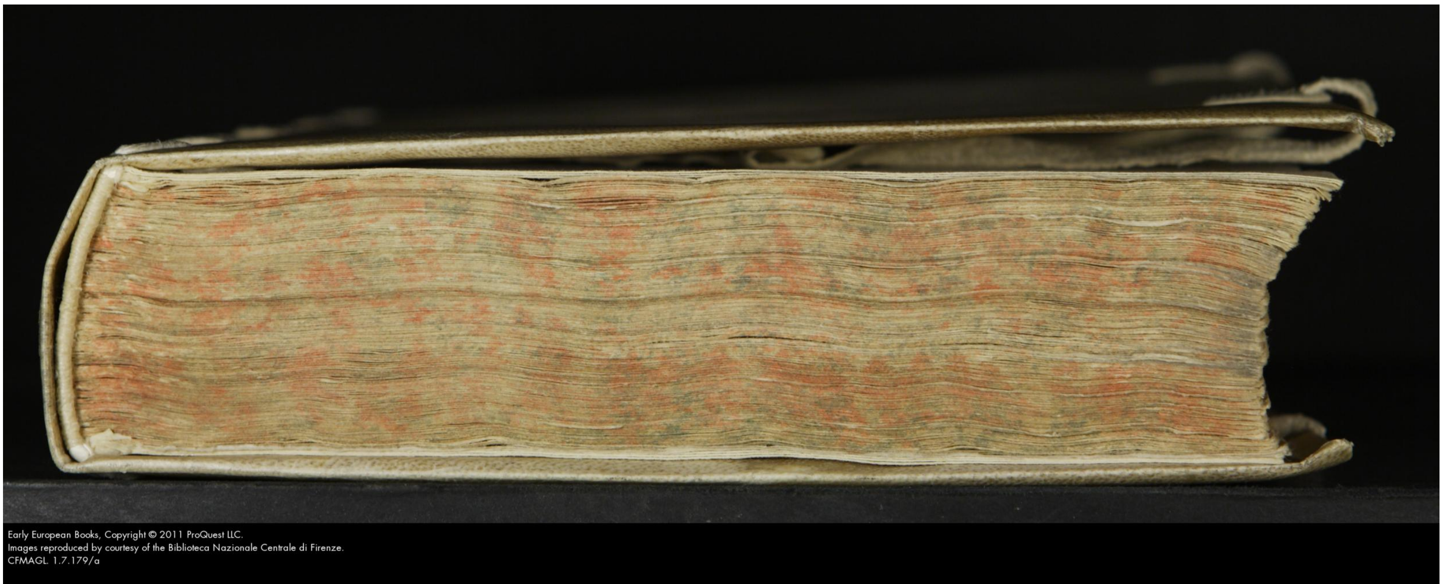
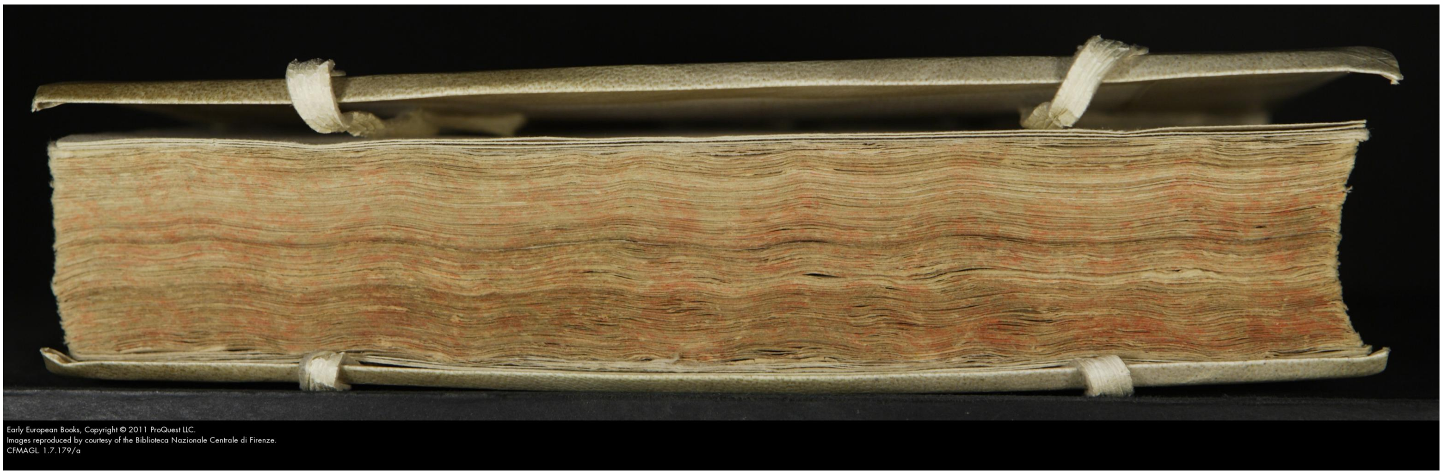


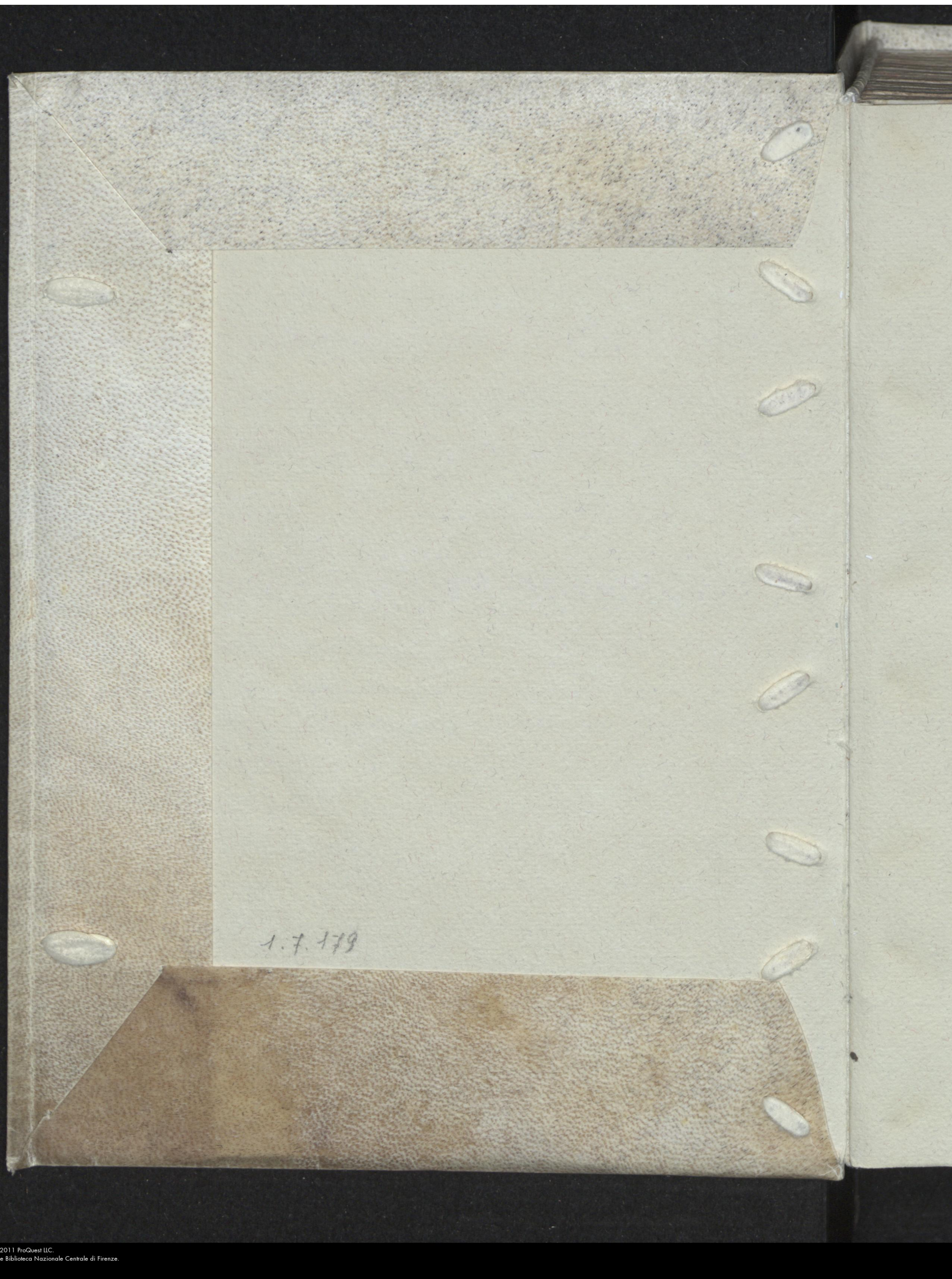

1
7
179

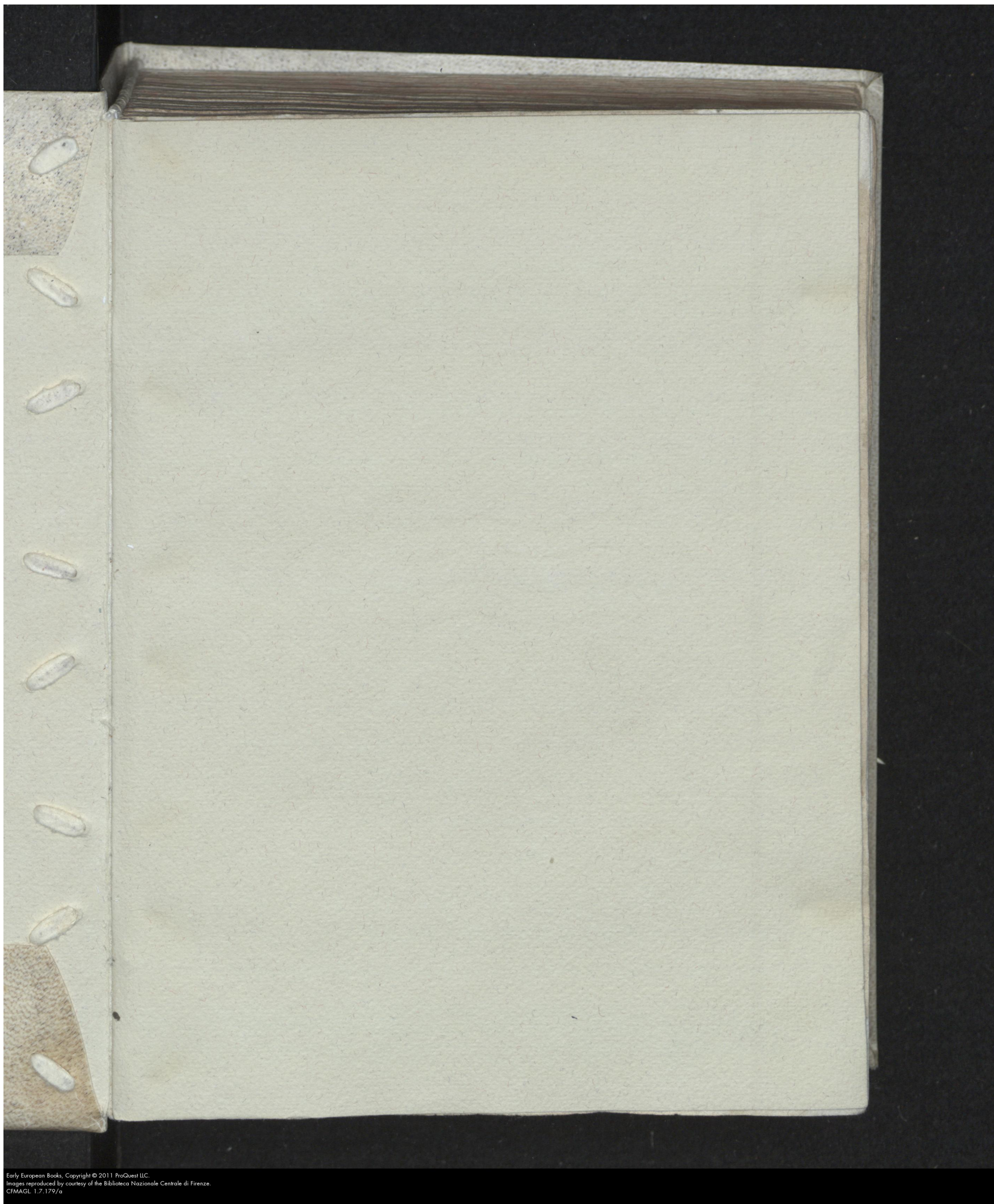


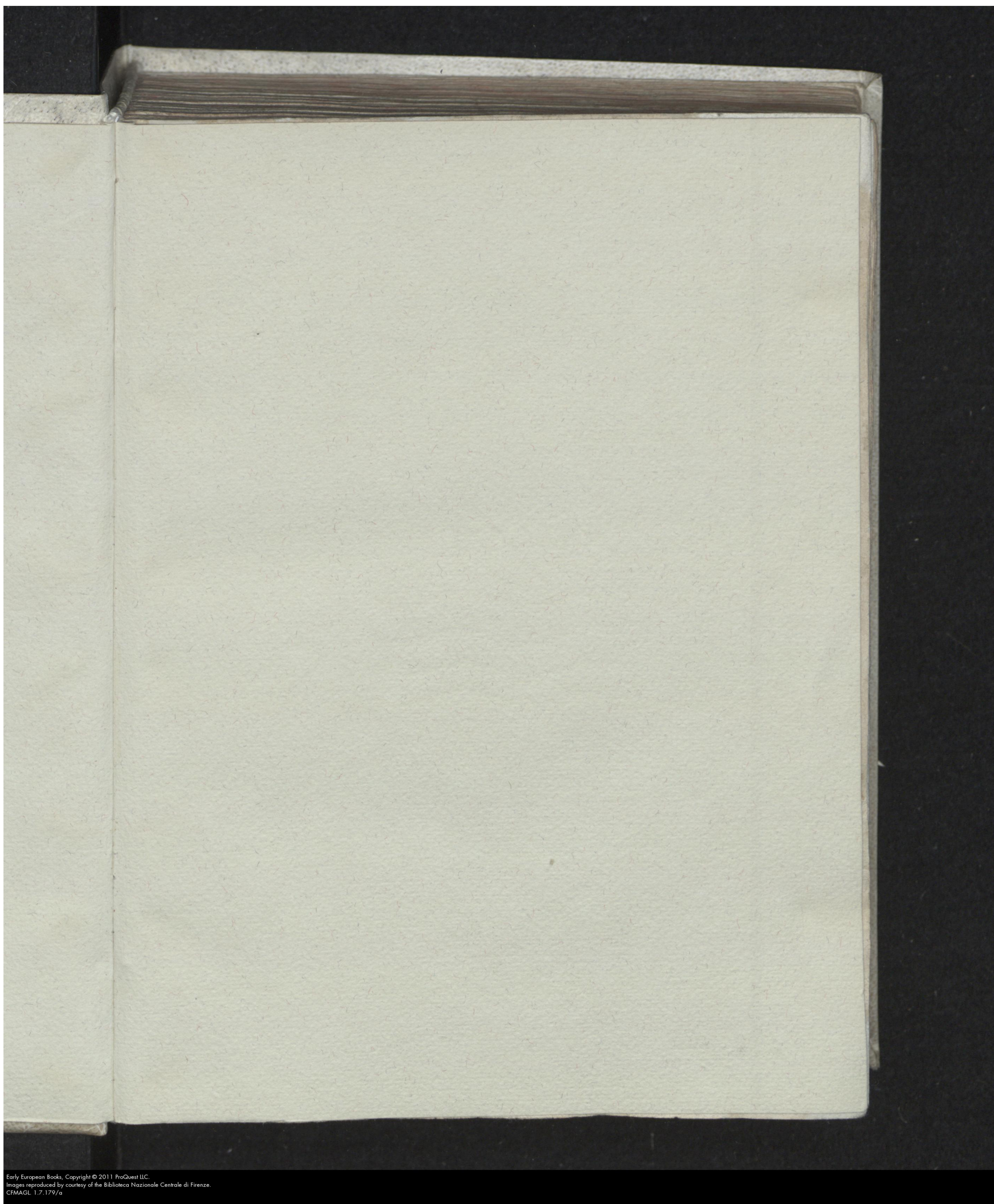







1.7.179





P. RAMI ARITHMETICAE LIBRI DVO: GEOMETRIAE SEPTEM ET VIGINTI.





BASILEAE, PER EVSEBIVM
Episcopium, & Nicolai fratris hæredes.
ANNO M. D. LXIX.

P. RAMVS LE- CTORI S.



X omnibus vigiliis (Lector) multos per annos in artium liberalium institutione elucubratis nihil elementis mathematicis, nobis æqué vel exercitũ laboribus, vel anxium curis, vel periculosum temporibus accidit. Nam cum á primis annis mathematum amore captus, Orontio Fineo (qui primus regia professione in Galliam mathematicas artes retulit) operam dedissem, protinus abductum rhetoricæ & philosophicæ exercitationes occuparunt: Interea tamen Ioannem Penam nostræ disciplinæ alumnum nactus mathematici oneris fasce me sublevatum & exoneratum putari. Adolescens enim fuit ingenio quidem ad omnes artes percipiendum mirabili, studio autem in literis latinis & græcis, in philosophia præcipué & mathematica tanto, ut ardentius aut flagrãtius nihil unquam viderim. Quare cum mathematica professio vacaret, & á nobis in examẽ productus, æmulatione competitorum severius examinatus esset, ita mentes omnium cepit, ut etiam adversarii eo loco dignißimum judicarent. Ergo commendatione tam raræ eruditionis professor factus, cum nostris consiliis excitatus spem mathematicæ illustrationis incredibilem concitasset, anno ætatis sexto & vicesimo in ipso professionis pene vestibulo extinctus est, magno mærore nostro, magnoq; mathematicarum rerum detrimento. Itaq; cum de physicis iam cogitarem, saxum idem rursus humeris nostris impositum, animo potius quam robore sustinui. Auxilia undique exquisivi. P. Forcatelus (quod in mercatore Hippocrate mirum fuisse alibi scripsimus) sine literatura, sine philosophia, solo ingenio atq; usu quodam mathematicus sesquiannum apud nos fuit. Hoc adjumẽto usus cum Euclidem totum accuraté observassem, ecce belli civilis calamitas, fuga civium, bibliothecæ direptio, frustraq; labores euclidei: Verum pace restituta, interim dum Grammaticam, Rhetoricã, Dialecticam recoquimus, reliquias naufragii recolligere libuit, & per Cardi-

nalem Castellonium parisiensis academiæ id est omnis doctrinæ conservatorem Forcatelo (cum alter mathematatum professor defunctus esset) mathematicam professionem procurare: ut gallica saltem lingua gallicam juventutem exercendo regii collegii columnam istam qua posset, facultate tueretur. Antecedentibus igitur studiis illis expeditis Euclides de integro repetitus est, & diligētius quam antea disceptatus: Intereaq; Federicus Resnerus germanus nobis adfuit, qui quid in literis & mathematis posit, propediem suo marte in Opticis Alaceni & Vitellonis declarabit. Atq; hæc secunda aggreßio cum strenué procederet, insania furiosorum humano sanguine nondum satiatorum rursus erupit, nec propius quicquam fuit, quam abjectis cæteris cogitationibus saluti consulere, id fuit in optimatum castra confugere, & pro diagrammatis radio descriptis urbes ferro flammaq; deletas, strages totis campis miserabiles, prælium deniq; longé omnium acerrimum spectare. Quid enim parisiensi prælio simile vel Marathon Periclis vel Salamis Themistoclis habuit? Sed hæc mathesis alio problemate describetur. Tempestas sexto post mense sedata est, domum reuersus nil in bibliotheca præter inania pulpita reperi. Resnerus noster (qui Lutetiæ permansisset) é prædonum manibus mathematicas commentationes averterat. At vix domũ reversus videri poteram, cum jam tertiam tempestatem non obscuræ nubes cælum intuentibus monstrarent. Cumq; Iulianus alter edicto ad omnia academiæ compita per falsum regis nomen publicato (rex enim Christianißimus, ubi per senatum hac indignitate commotum resciuit, indignißime tulit) cum Iulianus (inquam) alter iterum christianos scholis prohiberet: imó uerò quod apostata ille nunquam cogitarat, armis expelleret. Itaq; ne tertio naufragio funditus periremus, impetrari ab humanißimo rege annuæ ad Europæ nobiles academias peregrinationis tanquam legationem liberam, é mediaq; flamma mathematicos illos omnium rerum longé charißimos penates in Germaniam abripui: In extremis tamen regni finibus cum brevia & syrtes prætervectus mihi viderer, duodecim equites é jugo montis decurrentes animadverti, cædemq; intentan-

intentantibus & Condæi principis consiliarium hostiliter inclamantibus ultro occurri, & diplomate regij commeatus tantisper repressos docui longè alio nos apud regem esse numero locoque quàm ipsis esset persuasum, aliaque tali tempori accommodata disserui. Ter dimissus, ter repetitus, tandem velocitate summa eó perveni, ubi sicarijs licentia nequaquam par esset. Deinceps tutus & lætus in Germaniam adventus bonorum ac doctorum omnium (quibus adhuc occurrimus) singulari humanitate & gratulatione exceptus est. Hoc sacrum mathematis asylum fuit: reducta tandem (ut tertio mathematicarum scholarum libro proposuimus) & composita utcumque & numeris & lineamentis sunt elementa, eaq; edita & publicata, saltem ne tot periculis erepta imposterũ periclitarentur. Verumtamen tanta malorum Ilias insequitur, ut cum respirare primum cœperim, tum afflictæ patriæ gravißimum dolorem animo percipiam. Laborum istorum partus feliciora lucis auspicia mereri videbatur. Quemnã igitur mecœnatem hoc munere potißimum colerem? Christianißimumne regem? an ex optimatibus nostris præcipuum aliquem? At Galliæ nescio quæ furialis erynnis miserabile regi spectaculum in ipso & regni & ætatis initio videtur extruxisse, in quo principes regni sui mutuis cædibus concurrentes ad extremum regni exitium spectare cogeretur. Itaq; Deus optime maxime miserere pereuntis regni, solem purioris religionis clarum & illustrem in Galliam tuam reducito, regem meum regum omnium beatißimum efficito: arma tot fortium utrinq; virorum in hostes nominis tui convertito. Interea veró mathematum studiosos omnes obsecrabo, ut suscipiant laceras istas totoque æquore jactatas

—Reliquias Danaum atq; immitis Achilli

Si in Angliam repulerint: Elisabetham reginam laudum uirtutumque omnium patronam reperient. Si ad I. Steuardum Scotiæ rectorem principem cum bellica laude tum uera pietate insignem accesserint, nusquam á magistro naufragos veluti condiscipulos gratiores accessuros existimem. Germania jam mihi altera patria est, & præsens singulos mathematico

 proœmio

prooemio appellatos salutare statuo. In Italia Hieronymum Cardanum et Federicum Commandinum ubi salutaverint, non dubito quin gratis animis excipiantur. Sed in Lusitaniam ad P. Nonium secundos ventos exoptaverim. Hic enim vir Archimedeus, vir (inquam) Archimedeus est, qui ejectis & egentibus præcipué poßit opitulari. Scripsi & rescripsi hic pleraque millies, & infinitis subinde modis commutavi, antequam ad propositam methodi normam quadrarent, magisq; logicam in mathematico themate exercui, quam mathematicam in suo pulvere serioque usu tractavi: neque jam biennio toto ad hæc studia recolendum á novis quotidie turbis requies ulla fuit: neque ideo dubito, quin tanta commutatio tanque tumultuaria editio pleraque tulerit, quæ pacatioris & quietioris otii meditatio non ferret: Hanc igitur meditationem mathematici mathematico prooemio appellati capeßite: usum locis omnibus exigite: hujus enim gratia permulta ex elementis sustuli, & vos fortasse plura tolletis: aut quorundam nobis ignotum fructum demonstrabitis. Statueram singulos libros singulis uestrum nuncupare, quod equidem confido restituta pace facturum, ut accuratius singula corrigerentur & illustrarentur. Insanire enim plerosque doctos homines existimo, qui patronum & quidem plerunque rerum ipsarum ignarum adversus reprehensores operum suorum præfationibus invocant, quasi & dii quidam sint, qui nihil offenderint, aut peccata sua corrigi reipub. perniciosum arbitrentur. Quamobrem quantus cujusque uestrum erga mathematicas artes est amor, tantum in mathematicæ dignitatis emendationem & perfectionem incumbite, gratius isto beneficio atque optabilius mathematum studiosis accidere nihil potest.

ERRATA ARITHMETICAE SIC CORRIGITO: primus numerus paginam, ſecundus lineam ſignificat.

1.23 nota puncta in periodis.3, 4 loci : tum 1 & 2 & 7 ſunt 10 pro 1 ſequentis loci.8,35 diviſorem & facio 12,14,32 ſi primus non:15.36 pro ipſis erit.15, 30 pro 2 lege 8. 17.30 $\frac{2}{3}$*, 32 dividam 5 aſſes 12.20,7* $\frac{6}{49}$*, 10 numeros alternis.24, ſervabo : 23,8 pro 2 lege 3 : & 26, ſupertri quarta. 24, 8,ſic 10 ad 12 & 35 á medio ſuperat factum ab extremis facto.27,4 lege 89* $\frac{1}{7}$*. Eme, 16 iam. 31, 10 imitatus eſt,31 lege* $\frac{5}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{3}$

ERRATA GEOMETRIAE SIC CORRIGITO: primus numerus paginam, ſecundus lineam ſignificat. Figuras quaſdam euerſas aut tranſpoſitas redigito in ordinem.

5,16 aſymmetræ.6,3 ab Euclide. *8,15 inſcriptã. 23,39 geometricæ. 42,6* i u y. *42,7 & 8* a u y, *9* a *&* y. *57, 7 item. 11 baſi* y e *erit* e i *ad* i u *ut* y o *id eſt per 5* e *12* e *5* a i *ad* o u, *& alterné, ut* e i *ad* a i, *ſic* i u *ad* o u. *58, 9 per 2 &* i e, *21* a i e *æquantur, 32 eadem* a e. *60, 29 in minore. 64,30 terminum. 65,13 menſoris. 66,36 ad* u a, *41 recedendi. 67,9 pone* l *ad finem radii optici in figura. 68,3 th* Euclidis, *19 pedum 20:70,30* $\frac{9}{23}$*. 71,19,63 . 75, 5 parallelogrammi. 76, 10 alterna,12 cum rotundo,13 duplum trianguli. 85,1 celebratum,40 ſi. 87,15 & duplici, 31 conſectarium. 88,6.144: Hæ notæ ſignificant quot. 89,1 ſingulares. 90, 11 pone in figura 12. 91, 21* Car*danus tantum agri. 92,13 triplex. 93,3 dele tertio.13 totius. 94,10 &* o e i, *36* n j y. *95,27* l s *id eſt,29 latera, 40 fuerunt rationales. 97, 10 repone* o *in fine lineæ* i l. *103,2 utcunque,32 geneſis. 105,25 ſintque. 108,15 hac. 110,1* a e *ſecet. 115, 31 æquilatera. 118, 5 repone in figura tangentem* i u. *128,37 fac diametrum* a o u. *141, 26 dele denique. 142, 27* é *18 &. 144, 12 puncto* t. *146, 24 quam* a i *&* a o *æquatur. 151, 1 æquantur. 154, 12 ſi, 30 planis* s r l m, *&* u j v f *biſecantibus,32 dele duo plana* s r l m & u j v f *32 ſectio* t ſ. *156,20* é i c *15* e *4. ſtereometria. 161, 9 ſtereometria,11 additus. 164, 15* Et *ita,16 demonſtrantis. 166, 16 duplex, 19* y n, *30 in. 179, 1* d b. *180, 18 duobus. 185,15 manens eſt. 186,51 cylindri.187, 13 hæc geodæſia, 25 cylindris* a b, *27, vaſis. 189,12 diametro.*

P. RAMI ARITHMETICAE LIBER I.

CAP. I. DE NOTIS ARITHMETICIS.


Rithmeticæ est doctrina bene numerandi. Partes arithmeticæ duæ sunt, simplex & comparatiua: simplex, quæ considerat simplicem numeri naturam. Numerus est secundum quem unum quodque numeratur: ut secundum unitatem unum, secundum binarium duo, secundum ternarium tria, & sic deinceps omnes numeri: Itaque numerus est unitatis aut multitudinis: potestque esse minimus, ut unitas: maximus autem quo major, dari nequeat, nullus esse potest. In numero spectatur primum notatio, deinde numeratio. Numeri, vero in abaco scribendi & notandi hæ decem sunt notæ, 1.2.3.4.5.6.7.8.9.0. quarum prima significat unum, secunda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, sexta sex, septima septem, octaua octo, nona novem: Circulus quæ nota est ultima: nil per se significat: valet tamen ad alias notas amplificandum: Amplificationis gradus sunt tres, deincepsque periodis similiter iterati, semel, decies, centies. Nam de primis novem notis quælibet sola, aut ultimo universi numeri loco, suum numerum semel exprimit: penultimo, decies, antepenultimo centies: Hæc prima est periodus: Secunda est millium. Quarto itaque loco numerabis millena semel, quinto decies, sexto centies. Hinc sequitur tertia periodus, ubi numerabis millies millena semel, decies, centies: tum similiter quarta periodus est millies millena millia, ubi tres illi gradus similiter iterantur: & sic in infinitũ. Numeros igitur ita notabis unũ 1. decem 10. centum 100. mille 1000. decem millia 10000. centum millia 100000. millies millena 1000000: duo 2. viginti 20. ducenta 200. duo millia 2000. viginti milla 20000, ducenta millia 200000. bis millena millia 2000000: sic notæ singulæ locis ternis augentur. Atqui si numeri pluribus notis descripti & collecti summa lõgior fuerit: ut eam suis partibus efferre condiscas: fines periodorum punctis distinguantur. Numerum igitur decẽ his notis sic interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 ita enuntiabis: Primo membro dices millies millena millia. Secundo ducenties tricies quater millena millia. Tertio quingenta sexaginta septem millia: Quarto octingenta nonaginta. Quapropter hoc commune velut alphabetum decem notarum ad quemlibet notandum numerum esto, alphabetum tamen non voci, sed manui & scripturæ, id est abaco necessarium.

Correctio: nova puncta in periodi

CAP. II. DE ADDITIONE.

NVmeratio é duobus oblatis numerorum terminis tertium invenit, & quidẽ nisi tota simul expediri possit, inductione partium utitur, quoniam idem

est numerare per totum & per partes, tumque nota quælibet tanquam solitaria spectatur, & si sequenti numerationi serviat, mente reservatur ad effugiendum crebrioris lituræ tædium. Numeratio est prima aut conjuncta. Prima, quæ numerum cum numero semel numerat, ut additio & subductio. Additio est numeratio prima, qua numerus additur numero, & habetur totus. Hic sunt decem unitates. 1.1.1.1.1.1.1.1.1.1. quibus addendis numeramus 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10: ubi ad numerum quemque antecedentem unitas additur: & hæc prima species est additionis per unitatem: 2 addatur ad 1, totus erit 3: & 2 addatur ad 3, totus erit 5: & hic secunda species est additionis per 2: 3 addatur ad 1, totus erit 4: 3 addatur ad 4, totus erit 7: & tertia species additionis erit per 3: & sic deinceps. Additio numerorum continuorum prior & facilior est, quia toti cum totis simul adduntur: ut è quatuor debitoribus primus debeat aureos 1000. secundus 200. tertius 30. quartus 4: summam continenter addes, & dices esse 1234 aureos, & sic Aristoteles ait numerum necessario numerari per additionem. Additio disjunctorum numerorum præcipuam meditationem requirit, & quidem in notis primum inter se singulis: ut discipulus prompte sciat addere singulas cum singulis: ut 1 & 2 sunt 3: 4 & 5 sunt 9: 9 & 8 sunt 17, & similiter totum alphabetum 1.2.3.4.5.6.7.8.9, sursum deorsumque addendo meditetur. Hic Pythagoræus additionis abacus est. Numerorum disjunctorum additio sinistrorsum inducenda est, ut excrescentes summæ locis excrescentibus ordine facilius notentur: & ex ijs additis collectus numerus interjecta linea, subnotetur. Esto primum exemplum facillimum. Debitor tibi debet uno nomine coronatos 234, alter 111: Quæratur igitur quæ summa sit ex utroque. Ordine dispositis numeris, ut similes inter se respondeant hoc modo.

2	3	4
1	1	1

sic incipiam: 1 & 4 sunt 5. Itaque 5 subnotabo: deinde 1 & 3 sunt 4: & hic secundo loco 4 subnotabo: Denique 1 & 2 sunt 3: quæ similiter subnotabo. Inductio sic erit.

2	3	4
1	1	1
3	4	5

In hoc exemplo tertius numerus invenitur è duobus datis: inducitur per partes, quæ singulæ tanquam solitariæ spectantur. Esto jam paulo plenius exemplum ubi mentis reservatio adhibeatur: addantur 56789 ad 1234: dispositis numeris hoc modo.

5	6	7	8	9
	1	2	3	4

sic incipiam ab ultimo loco: 4 & 9 sunt 13: hic duæ notæ sunt duobus locis no-

tandæ:ultima scribenda est ultimo loco,& secunda reservanda in secundum locum. Itaque subnotabo 3 & reservabo 10 pro uno sequentis loci, & dicam sequenti loco,1 & 3 sunt 4: 4 & 8 sunt 12, subnotabo 2 & reservabo ut antea, 10 pro 1 sequentis loci:tum 1 & 1 sunt 2:& 2 & 6 sunt 8: quæ subnotabis: Deinde 5 sola reperiam,quæ sola similiter subnotabo: denique invenies his duobus numeris additis totam summam esse 58023. Inductionis summa sic erit.

5	6	7	8	9
	1	2	3	4
5	8	0	2	3

Potest verò & complurium numerorum esse additio,sed tamen duo tantum separatim spectantur, & duo primum additi tanquam unus additur ad tertium, neque duobus plures adduntur,ut tertius inueniatur:Ut si quæratur quampridem vixerit Homerus, & respondeatur é Gellio, 160 annis ante conditam Romam,quæ condita sit ante natum Christum annis 752: Christum vero natum anno abhinc 1567. addantur hi tres numeri: Summa inductionis indicans Homerum annos abhinc 2479 floruisse,erit hoc modo.

	1	6	0
	7	5	2
1	5	6	7
2	4	7	9

Idem erit si quotlibet numeros proposueris,ut hic.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	0	0	2	0	0	3	0	4
	7	9	5	6	8	3	1	0	9
2	0	0	6	9	9	4	5	2	3

CAP. III. DE SVBDVCTIONE.

SVbductio est numeratio prima,qua numerus subducitur á numero,& habetur reliquus.Subduco 1 de 2,manet 1:2 de 5,manent 3:3 de 9, manent 6.Subductionis meditatio in singulis notis cadē hic esse debet, quæ fuit in additione: Tollo 3 de 7,manent 4: tollo 4 de 9, manent 5: & similiter totum alphabetum 123456789 omni genere versandum. Hic Pythagoræus subductionis abacus est.jam sit exemplū ubi totus numerus á toto simul subduci non possit,ut si

de summa æris illius alieni 3 4 5 subducenda sunt 234, dispositis ordine numeris hoc modo,

3 4 5
2 3 4

subducendo infra: supra autem à quo subductio facienda, incipiam à sinistra dextrorsum, contra quam in additione: Tollo 2 de 3, manet 1, & supernoto 1 deletis 3 & 2. Deinde subducam 3 de 4, manet 1, & supernoto 1 deletis 4 & 3: denique subductis 4 & 5 manet 1, & supernotabo 1, deletis 5 & 4: unde inveniam reliquum esse 111, cum subduxero 234 à 345. Inductio tota sic erit.

1 1 1
3 4 5
2 3 4

Hoc exemplum invenit è duobus oblatis tertium, inducit per partes, easque tanquam solitarias. Esto jam & exemplum reservati mente numeri, nempe cum sequens subducēda nota major est, quàm supraposita, tum è reliquo præcedente, 1 mente reservabo, quod notam sequentem denario augeat: ut si subducenda sint 3 4 5 de 4 3 2, cum subducam 3 de 4 non supernotabo 1, quia 4 sequens subducenda nota major est supraposita 3, sed illud mente reservabo, & 4 subductis à 13 manerent 9, quæ nequaquam propter eandem caussam notabo, sed uno minus, 8 tantum supernotabo, & 1 mente reservabo, quia sequens subducenda nota major est. Itaque 5 subductis à 12, reliqua 7 supernotabis: unde inveniam subductis 3 4 5 de 4 3 2 relinqui 87. Tota inductio sic erit.

8 7
4 3 2
3 4 5

Hæc subducendi vera via est, & majoribus deinde numerationibus necessaria, nec omnino prius antecedens nota est subducenda, quàm providero unde reliquæ subduci possint. Si intercurrant circuli significantibus notis, cum similibus tamen inscribendi, & eadem tenenda via est. Carolus magnus anno Christi 801 coronatus est imperator: nunc autem annus est Christi 1 5 6 7. anni itaque ab imperio Caroli nunc sunt 766. Inductio sic erit.

7 6 6
1 5 6 7
8 0 1

Jam ponatur exemplum majoris differentiæ: ut à 4 0 0 0 0 2 3 subducantur

 9 9, resi-

99,restabunt 399924,inductio sic erit.

3 9 9 9 9 2 4
4 0 0 0 0 1 3
9 9

Sit & alterum exemplum, ut subducantur 287659 de 387657. Inductio sic erit.

9 9 9 9 8
3 8 7 6 5 7
2 8 7 6 5 9

Si plures termini fuerint vel subducendi, uel ejus, á quo subductio facienda, reducendi sunt prius additione in unam summam: ut si velis subducere 465 de 234. & 905. addes 234 & 905, totus erit 1139: unde subductis 465, reliquum erit 674.

CAP. IIII. DE MULTIPLIcatione.

NUmeratio prima ejusmodi est, conjuncta sequitur, quæ numerũ cum numero toties numerat, quoties proponitur. Numeratio cõjuncta est multiplicatio, aut diuisio: multiplicatio est, qua multiplicãdus toties additur, quoties unitas in multiplicante cõtinetur, & habetur factus: unitas auget addendo: ut 1 & 1 sunt 2: 1 & 2 sunt 3: 1 & 3 sunt 4: attamen nihil auget multiplicando. Nam semel 1.2.3. sunt tantũ 1.2.3. Item 2 sibi additus est 4, quot item efficit sui multiplicatione. Nam bis bina sunt item 4. Id in illis est proprium. At 2 & quilibet alius deinceps numerus quolibet loco cæteros numeros multiplicat: ut bis 3 sunt 6, hic sumo 3 bis, quoties nempe unitas in 2 multiplicante cõtinetur. Denique pro dato multiplicante multiplicãdus additur. Numeri inter se multiplicati faciũt eundem: ut quater quina sunt 20. & quinquies quaterna sunt itẽ 20. Meditatio autẽ de multiplicandis inter se notis tanto accuratius suscipiẽda est, quãto majus est multiplicationis opus. Itaque puer perdiscat primo singulas notas per se multiplicare: bis bina sunt 4: ter terna sunt 9: quater quaterna sunt 16: quinquies quina sunt 25: sexies sena 36: septies septena 49: octies octona 64: novies novena 81. Tum singularum notarum cum singulis multiplicatione sciat quid efficiatur: ut bis 3 sunt 6: bis quaterna 8: bis quina 10: bis sena 12: bis septena 14: bis octona 16: bis novena 18: & sic in reliquis notis: sed in majoribus major est attentio: ut novies octona sunt 72: novies septena, sena, quina sunt 63, 54, 45: octies septena, sena, quina sunt 56. 48. 40. Hanc singularum notarum multiplicationem assecutus discipulus, multiplicationem quamlibet facilem habebit. Hic Pythagoræus multiplicationis abacus est. Atqui si rudibus majorum notarum aliqua difficilior erit, licebit & hic per partes numerare, ut octies novena,

si difficile sit numerare, addam primo quater 9, deinde summam addam sibi ipsi, id est dimidium dimidio ut totum habeam, sic.

	9
	9
	9
	9
3	6
3	6
7	2

Quinetiam licebit per partes & hic multiplicare, & particulares summas addere, ut 8 per 9 sic.

2	7
3	5
3	5
1	0
2	1
	6
7	2

Sed jam majoris & è pluribus notis constituti numeri multiplicatio proponatur, & quæratur quis aureorum numerus menstruo stipendio 4 5 6 militum, cū singulis 4 aurei attribuantur. Id assequar 456 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum, ut in additione procedam: quia multiplicandi notæ toties addendæ, quoties unitas in multiplicante continetur, & majorem commodius superne collocabo. Deinde multiplicantem per tres multiplicandi notas sigillatim ducam, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus absolvam. Numeris igitur ita dispositis, lineaque ut in additione subscripta, sic incipiam.

4	5	6
		4

Quater 6 sunt 24: notabo 4, & 20 reservabo pro 2 loci sequentis: talis reservatio fuit in additione, & hic tanto crebrior, quāto numeratio major est: quater 5 sunt 20, & 2 reservata, sunt 22: notabo 2, reservabo iterum 20 in locum proximum pro 2, quater quaterna sunt 16, & 2 reservata sunt 18, quæ notabo integra: Inductionis summa sic erit.

	4	5	6
			4
1 8	2	4	

Unde

Unde inveniam 4 5 6 per 4 multiplicatis fieri 1 8 2 4. Hic uidemus inventionẽ, tertii inductionem partium, notarum solitudinem & reservationem. Idem fiet, per partes utriusque numeri tum multiplicandi tum multiplicantis. Proponatur igitur exemplum paulo plenius, & quidem per partes multiplicantis similibus multiplicandi partibus respõdentes, ut 2070 per 204 multiplicentur. Singularis inductio partium componet tandem 4 2 2 2 8 0 hoc modo.

		2	0	7	0
			2	0	4
		8	2	8	0
	0	0	0	0	
4	1	4	0		
4	2	2	2	8	0

Quo in exemplo, sicut in cæteris omnibus, circulus per circulum, aut per significantem notam nihil efficit. Circulus tamen pro inventione talis multiplicationis notabitur in principio ad sequentes notas augendum. At si sit in medio multiplicantis loco, nihil est necesse: compendio autem numeros in circulum desinentes multiplicare possumus detractis ultimis circulis: deinde iisdem facto postpositis: ut si multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omissis circulis illic duobus, hic uno, multiplicabo 72 per 4 5, & facto 3 2 4 0, postponam tres circulos hoc modo, 3 2 4 0 0 0 0. His perceptis nulla multiplicationis numeratio proponi poterit difficilis vel obscura, quamlibet ea magna sit: ut si multiplicandus sit 1 2 3 4 5 6 7 8 9 per 7 8 9 factus erit 9 8 6 0 7 4 0 6 5 2 1.

CAP. V. DE DIVISIONE.

Diuisio est, qua divisor subducitur à dividendo quoties in eo continetur, & habetur quotus: unitas minuit numerum subducendo, ut tollo 1 de 1, de 2, de 3, manet 0, 1, 2: non minuit tamen dividẽdo. Nam 12 divisis per 1, quotus est 12, id est 12 unitates quales sunt in dividendo, & hic divisus & quotus est idem. Divisis 12 per 12 quotus est 1, id est pars duodecima: & hic quotus est dividendi pars quota cognominis divisori: ut secunda, si divisor sit 2: tertia, si 3: quarta, si 4, & sic deinceps. Atque ut in additione numerus totus, in subductione reliquus, in multiplicatione factus, sic in divisione quotus cognominis divisori quæritur, id est si per 2 dividatur, quid valeat una secunda dividendi, si per 3, quid tertia, si per 4, quid quarta. Diuisio igitur multiplicationi respondet: sed analogia inversa: ut enim in multiplicatione unitas est ad multiplicantem, sic multiplicandus est ad factum: contra vero in divisione: ut dividendus ad divisorem, sic quotus ad unitatem.

Tres autem diuisionis termini notantur, diuidendus supra, divisor infra, quotus ad

tus ad latus, ut diuisis 12 per 4, quotus 3 erit hoc modo.

12
4 (3

Atque meditatio illa, quæ in additionis, subductionis, multiplicationis numeratione commendata est, est hic imprimis commendanda, ut discipulus sciat quem numerum quælibet nota singularis, & per quem dividat: Sciet autem per comparationem multiplicationis. Nam si numerus faciat numerum per aliquem, factum dividet per eundem. Unitas vero facit omnem numerum per ipsum, & omnis numerus seipsum dividit per unitatē: Ergo unitas dividit omnem numerum: Bis quaterna sunt 8: ergo 2 dividit 8 per 4, & 4 dividit eundem per 2. Quater 5 sunt 20: ergo 4 dividit 20 per 5, & 5 dividit 20 per 4. Septies 8 sunt 56: Ergo 7 dividit 56 per 8, & 8 dividit 56 per 7. Octies 9 sunt 72: Ergo 8 dividit 72 per 9, & 9 dividit 72 per 8, omninoque numerus dividitur per eos numeros per quos factus est: qui multos factores habet, habet etiam multos diuisores: Hic igitur Pythagoræus diuisionis abacus est. Sit exemplum ubi inductione sit utendum, & quidem dextrorsum, ut in subductione. Exemplum erit primū de divisore toto & integro: dividantur 7476 per 6, notabo primum dividendum supra, divisorem infra, & ad latus sinistrum, ut immobilis semper appareat, quamuis singulis in locis, deleatur: secus in prolixa divisione confusio quædam per errorem memoriæ creari posit.

6) 7 4 7 6
6

é 7 possum subducere 6 semel, & manet 1: notabo igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo, & 6 divisore, superscribam 1. Prima inductio sic erit.

1
6) 7 4 7 6 (1
6

Secundo producam 6 divisorem in proximum locum. jam 6 possum subducére bis á 14, nec amplius, & bis senis subductis á 14 restant 2. Hanc igitur meditatam multiplicem subductionem animo reseruans adnoto primum 2 post 1 pro quoto. Deinde ne forte lapsus memoriæ intercidat, aut aliquid aliud offensum sit, repeto ab animo depositum separatim per multiplicationem, & subductionem, & multiplico primo 2 quotum per 6 divisorem, & reservatum ac jam refectum subscribo sub 14, deleoque 6. Secundo subduco 12 á 14, & manent 2, quæ deletis 12 & 14, superscribo. Secunda inductio sic erit.

1 2
6) 7 4 7 6 (12
6 6
1 2

Tertio

Tertio producam 6 divisorem in proximum locum 27, unde possum subducere quater sena, id est 24, ut 3 maneant. At factum & reliquum servans animo adnotabo 4 post 12 pro quoto: Deinde factum repetam eadem multiplicatione 6 per 4, & subscribam 24 deletis 6, tum subducam factū 24 à 27, & superscribam 3 reliquum, deletis 24 & 27. Tertia inductio sic erit.

```
6) 2 2 3
   7 4 7 6 (124
   6 6 6
   2 2 4
     2
```

Postremo producam 6 in reliquum locum 36, unde possum omnino subducere sexies sena, id est 36, ut nihil maneat. At in memoria deponens 36 adnotabo 6 post 124 pro quoto: Deinde repeto depositum, multiplicando 6 per 6, & subjicio 36. Postremo subductis deletisque utrinque notis, tota inductio sic erit.

```
2 2 3
7 4 7 6 (1246
6 6 6 6
2 2 4 6
  2 3
```

Hic invenio 7476 in 6 divisis quotum esse 1246, qui hac divisione expetebatur. Divisionis igitur opus primo contexitur meditatione multiplicis subductionis, & adnotatione quoti, ubi jam peracta divisio est, sed peracta tantum in mentis abaco, ut memoria tanto major hic requiratur, quàm antea: Deinde velut ad memoriam & fidem meditationis probandum retexitur, exemplo oculis subjecto, repetita tum multiplicatione per quotum & divisorem, tanquam pignora depositi: tum facti à dividendo subductione. Atqui si plures sint notæ divisoris, omnes simul velut una considerantur, & subducuntur æqualiter. Cujusmodi exemplum sit de divisore multiplici, qui per partes suas æqualiter subducendus sit á suprapositis dividendi notis, quoties nempe, continetur. Et hic subductionis vera via, quam docui, plane cernitur, cum subducere incipiamus dextrorsum singulas subducendi notas ante meditando, quam quid quam de quoto statuatur. Dividantur igitur 144 per 12, positis ordine numeris hoc modo.

```
12) 1 4 4
    1 2
```

Videbo primum 1 ab 1 semel subduci, & toties 2 à 4, & 2 restabunt: adnotabo

igitur 1 pro quoto, & deletis 14 & 12 ſuperſcribam 2. Inductio prima ſic erit.

```
        2
12)  1  4  4 (1
     1  2
```

Secundo producam diviſorem in proximum locũ 24: ac videbo 1 á 2 bis ſubduci poſſe, & 2 á 4 toties, neque quidquam reſtare. Inductio tota ſic erit.

```
        2
12)  1  4  4 (12
     1  2
        1  2
```

In prima inductione hujus exempli, ſecunda diviſoris nota ſæpius ſubduci poterat, quam prima: ſit exemplum, ubi prima ſæpius ſubduci poſsit, quam ſecunda, & quidem diviſor ſit majorum notarum. Dividantur 841 coronati ex præda militibus 29. Notabo primo dividendum & diviſorem ſic.

```
29)  8  4  1
     2  9
```

Ac videbo 2 ab 8 quater quidem ſubduci poſſe, ut primi 20 milites ſinguli capiant 400 coronatos: at reliqui 9 milites clamabũt iniquam partitionem eſſe, neque partem ſibi æqualem relinqui, quia 9 á 4 toties ſubduci non poſsit: poſſum etiam 2 ter ſubducere ab 8, ſed á reliquis 24 non poſſum toties ſubducere 9: ſubducam igitur, ut æqualitas ſubductionis in partibus diviſoris obſervetur, 2 ab 8 tantum bis, & á reliquis 44 toties ſubducam 9, & manebunt 26. Itaque ſeruans mente bis 29, id eſt 58, adnotabo 2 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, recolligam quod iſta multiplicis ſubductionis æquatione comprehenderam, & reſtituam 58, quæ deleto diviſore ſubſcribam dividendo, & ab eo ſubducam, manebunt 26, quæ ſubducendo 58, & ſuprapoſito 84 deletis ſuperſcribentur. Inductio prima ſic erit.

```
     2  6
29)  8  4  1 (2
     2  9
     5  8
```

Secundo producam diviſorem in reliquum dividendi locum 261. Hic poſſum 2 ſubducere tredecies á ſuprapoſito dividendo 26: Verum ab uno reliquo non

poſſum

possum subducere 9 toties. Nec omnino fieri potest, ut nota divisoris ulla plusquam novies hac inductionis via subducatur: quia major numerus quã 9, unica nota comprehendi nõ potest. Cum vero 2 á 26 novies subduxero, á reliquis 81 potero subducere 9 toties. Depositis igitur in animo 261 adnotabo 9 pro quoto, & per eũ multiplicato divisore, repetam 261, quæ deleto divisore superscribam dividendo, ab eoque subducam deletis infra supraque, numeris tum subductis, tum, unde facta subductio est, nihil restabit. Tota inductio sic erit.

```
      2 6
29)   8 4 1  (29
      2 9 9
      5 8 1
        2
      2 6
```

Si divisor primo dividendi loco sit major, promoveatur in secundum locum: ut si dividam 252 per 42, non possum tollere 42 á 25: promovebo igitur divisorem in secundum locum, & reperiam 6 quotum. Si contingat aliquo post primum loco divisorem majorem esse dividendo, circulus in quoto adnotetur. Sic divisis 608912 per 304 quotus est 2003. Quod si in relictis in medio spatio vacuus locus offendatur, circulus videlicet ascribendus erit, quod accidet, si dividantur 364 in 26, ubi quotus erit 14. jam dividatur quamlibet magnus numerus, ars exposita sufficiet: ut si dividã illum antefactum numerũ 97407406521 per alterum factorem 789, alter factor quotus erit 123456789. Hoc exemplum & similia majorum notarum mathematicam & Platonis μεταστροφὴν, & Aristotelis ἀφαίρεσιν imprimis declarabũt. Pes bonus, oculus bonus ait tyronibus lanista: mens bona, memoria bona, manus bona dicat hic arithmeticus discipulo: Varietas enim tam multiplicis in una numeratione numerationis erectam mentem & constantem memoriam, fidelemque manum maxime omnium requirit. Ac jam nemo sibi arithmeticæ discipulus videatur, nisi singulis arithmetici studii diebus divisionem vel quam maximam poterit, efficiat. Compendia sunt etiam quædam in dividendo. Si divisoris prima nota sit 1, reliquæ circuli, detractis é dividendo ab ultima notis, quot circuli fuerint in divisore, peracta divisio erit: sic diuisis 500 per 10 vel 100, quotus erit 50. 5.

CAP. VI. DE NVMERO PARI *& impari.*

E divisione oritur numeri differentia, imparis & paris, primi & compositi. Impar est numerus á binario individuus, ut 3. 5. 7. Par est numer⁹ dividuus á 2. ut 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. Itaq; in ppetua serie numerorũ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15, alii sunt pares, alij impares, quod erat Eratosthenis cribrũ. Par est pariter par vel impariter par. Pariter par est par tantũ dividuus á pari per parẽ: ut

4 tantum dividitur á 2 pari per 2 parem. ut 8 tantum dividitur á 2 pari per 4 parem: tales sunt omnes á binario duplicati: ut 4.8.16.32. 64. Aelianus cap. 8. de re militari ait hunc numerum militiæ caussa excogitatum esse ad acies commodius permutãdum. Itaque phalangis numerus á Tacticis exoptatur 16384. Par impariter par est, par diuiduus etiam ab impari per parem, ut 6 dividitur á 3 impari per 2 parem: sic 12 dividitur á 3 impari per 4 parem: sic 30 dividitur á 5 impari per 6 parem.

CAP. VII. DE NVMERO PRIMO *& composito.*

ATque hæc numeri prima est differentia é divisione: secunda est primi & compositi. Numerus primus est numerus individuus ab alio multitudinis numero: ut 1.2.3.5.7: dividitur aũt unitas per unitatem solum, reliqui etiam per se: at per alium multitudinis numerũ sunt individui. Primus etiam dicitur incompositus, id est á nullo alio multitudinis numero factus. Numerus compositus est numerus dividuus ab alio multitudinis numero, ut 4 á 2 per 2 dividuus est, ut 12 á 3 per 4. Sic in Eratosthenis cribro 1.2.3.4.5.6.7.8.9. considerato primos esse 1.2.3.5.7. compositos 4.8.9. Numerus autẽ multis modis compositus, propterea que etiam dividuus sæpe singulares usus habet, ubi quæruntur numeri, qui plurimas exactas divisiones capiant. Sic 96 Archimedes elegit in circuli dimensione, cuius quotæ partes duodecim sunt 1.2.3.4.6.8.12. 16. 24.32. 48. 96. Sic astrologi 60 partiendis cælestium rerum momentis assumpserunt, cujus divisores sunt item duodecim, 1.2.3.4.5.6.10.12.15.20.30.60. Itaque ad inveniendum quot numeris numerus sit diuiduus, theorema tale inventum est. Divisores omnes dati cuiuscunq; numeri sunt ab unitate per se primi, dividentes quoties possunt, & datum & dati quotum, & quoti deinceps quotum quemlibet, deinde compositi á primorum ultimo per ultimum, & á sequenti per utrunque & ab utroque factum, denique á reliquis similiter per superiores omnes: ut, Esto 482, cujus oporteat omnes divisores invenire. Primo 1 nihil mutat, secundo 2 numerus primus dividet, & quotus erit 231, qui divisus per 3 deinceps primũ divisorem dabit 77, qui etiã per 7. primum divisorem divisus habebit in quoto 11. Hic habes 1.2.3.7. 11 divisores dati primos, é quibus inter se multiplicatis efficitur. jam ad compositos divisores accedo, & multiplico penultimum 7, per ultimum 11, facio 77. Hic primus ordo sic est.

7. 11. 77.

Secundo multiplico hos tres numeros per 3, & facio hunc secundum ordinem.

3. 21. 33. 231.

Tertio multiplico primum & secundum ordinem per 2, facioque hunc tertium & quartum ordinem.

2. 14. 22. 154.
6. 42. 66. 462.

Diuiſores itaque dati numeri 462 ſunt addita unitate numero ſedecim, 1.2.3.6. 7.11.14.21.22.33.42.66.77.154.231. 462. Hac via numeri civium 5040 á Platone quinto legum quæſiti ad multiplices publicorum munerum functiones dividendum diviſores omnes reperientur undeſexaginta, præter eum ipſum, ut Plato etiam illic admonet. Materies autem exercendi ingenii non mediocris hic erit. Exemplum primum diviſores primos tantum ſemel accepit, hoc accipiet, quoties poterunt, primi ſic erunt.

1	5	0	4	0
2	2	5	2	0
2	1	2	6	0
2		6	3	0
2		3	1	5
3		1	0	5
3			3	5
5				7

Hic 2 aſſumitur quater, ſæpiusque aſſumeretur ſi poſſet aſſumi, 3 bis aſſumitur, 7 ſemel. Atque hi primi ſunt diviſores, qui inter ſe multiplicati reſtituūt datum: compoſiti ſequuntur, qui & primos una recolligent hoc modo.

		5	7	35
	3	15	21	105
	9	45	63	315
2				
		10	14	70
	6	30	42	210
	18	90	126	630
2				
	4	20	28	140
	12	60	84	420
	36	180	252	1260
2				
	8	40	56	280
	24	120	168	840
	72	360	504	2520
2				
	16	80	112	560
	48	240	236	1680
	144	720	1008	5040

 Hic ha-

Hic habes undequinquaginta divisores præter unitatem: omnes igitur divisores in numero Platonico sunt 60 hoc modo. 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.12.14.15.16. 18.20.21.24.28.30.35.36.40.42.45.48.56.60. 63.70.72.80.84.90.105.112. 120.126.140.144.168.180.210.240.252.280.315.336.360.420.504.560. 630.720.840.1008.1260.1680.2520.5040.

CAP. VIII. DE NVMERIS PRIMIS INTER SE.

PRimus & compositus numerus ita est, unde differẽtia oritur primorum inter se, & compositorum inter se: cujus singularis est utilitas, ut apparebit postea in reductionibus & variis inventionibus. Primi inter se sunt numeri communiter individui á multitudinis numero, ut 2 & 3: ut 5 & 6: ut 8 & 9. Primorum inter se arithmetica paulo plenior est, datorum cognitio est per subductionem & divisionem. Si duo inæquales numeri perpetua subductione minoris à majore quoties poterit nullum multitudinis numerum antecedẽtis divisorem reliquerint, primi erũt inter se: sic 5 & 3 sunt primi inter se, quia subductis 3 à 5 manent 2, qui non dividit 3 antecedentem numerum, deinde subductis 2 à 3 manet 1, quæ dividit quidem 2 antecedentem, sed non est numerus multitudinis: sic 27 & 8 sunt primi inter se, quia si subducas 8 ter: subductio enim etiam multiplex assumenda est, 3 reliquus non dividet 8 antecedẽtem: tum 3 bis subductis ab 8, reliquus 2 non dividit 3 antecedentem: denique subductis 2 á 3, reliqua erit unitas sola. Sic 29 & 21 assidua subductio explorabit primos inter se: sic 96 & 67, & assiduæ subductionis exempla sic erunt.

27	29	96
8	21	67
3	8	29
2	5	18
1	3	11
	2	7
	1	3
		1

Si primus diviserit datũ, erit ad eum primus, ut in 5 & 8, 5 primus nõ dividit 8, & primus est ad eũ. atq; ita subductione & divisione primi inter se numeri cognoscuntur: fiũt etiã additione & multiplicatione. Si duo numeri sint primi inter se, totus ex iis est primus ad utrunque, & contra: ut 17 ex 8 & 9 est primus ad 8 & 9, & contra cum 17 sit primus ad 8 & 9, ipsi sunt primi inter se. Hoc additionis est. Si duo numeri sint primi ad tertium, factus ab utroque erit primus ad eundem, ut 4 & 6 sunt primi ad 7, & 24 ab iis factus primus est ad 7. Hinc duo sequuntur. Primum, Si duo numeri primi sint inter se, factus ab altero per se primus erit ad reliquũ: ut in 4 & 3: 16 factus à 4 per se multiplicato est primus ad 3. Secundum, Si bini numeri primi sint inter se facti, ab iis erunt primi inter se: ut in 8 9 primis sigillatim ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5. Item 9 ad 7 & 5: facti 72 & 35 ab 8 & 9, item à 7 & 5 sunt primi inter se. Ex his duobus tertium sequitur. Si duo numeri pri-

meri primi sunt inter se facti & á datis per se & á datis deinceps per factos, perpetuo primi erunt inter se, ut hic.

2	4	8	16	32
3	9	27	81	243

Ex hac inventione postea deducetur eximia progreſsio continuē proportionalium minimorum.

CAP. IX. DE NVMERIS COMPOSITIS INTER *ſe, eorumque communi diuiſore maximo.*

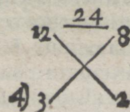
COmpoſiti inter ſe ſunt numeri cōmuniter dividui á numero multitudinis, ut 4 & 6 ſunt compoſiti inter ſe, quia communiter dividui á 2 numero multitudinis: ſic 5 & 10, quia ſunt cōmuniter dividui á 5 numero multitudinis: ſic 7 & 7 ſunt compoſiti inter ſe, quia ſunt communiter dividui á 7 numero multitudinis. Poteſt igitur compoſitorum inter ſe uterque eſſe compoſitus, poteſt alter tantum, poteſt etiam neuter. In arithmetica compoſitorum inter ſe numerorū duo ſpectātur, diviſor communis maximus, & dividuus communis minimus. Diviſor communis maximus eſt primus in aſsidua ſubductione dividens antecedentem, ut in 4 & 10: reliquus per aſsiduam ſubductionem 2 erit cōmunis diviſor maximus, quia primus relinquitur antecedentē dividens. Hinc conſectarium deducitur. Numerus dividens numerū eſt maximus amborum cōmunis diviſor, ut in 3 & 3 maximus cōmunis diviſor eſt 3. Nam 3 ſeipſum dividit, & dividit reliquū 3: Sic in 3 & 6 maximus communis diviſor eſt 3: quia ſeipſum primo, deinde 6 dividit, nec major numerus ternario poteſt dividere 3, proptereaque & maximus eſt diviſor in 3 & 6. Idem erit in majore exemplo.

5	6	7
3	4	8
2	1	9
1	2	9
	9	0
	3	9
	1	2
		3

Eadem via quotlibet compoſitorū maximus cōmunis diviſor invenietur. Nam duorū præcedentiū inventus diviſor pro ipſis erat dividuus: inventi itaque diviſoris & proximi cōmunis diviſor, ut antea requiretur: ſic in 4.6.8. diviſor communis maximus erit 2: quia cōmunis in 4 & 6 eſt 2, primus nempe reliquus antecedentem dividens: tum in 2 & 8 eſt idem 2: quia dividit 8 majorem: ſic in 9.15.21. diviſor communis maximus erit 3: ſic in 12.20.28. erit 4: ſic in 18. 24. 30. erit 6. Diviſor autem maximus oſtendit in quoto diviſorem minimum: ſic in 12 diviſor maximus 6 dabit in quoto 2, & compoſitos inter ſe dividens dabit in quotis primos inter ſe, ut in 12 & 8 maximus diviſor utriuſque communis dabit in quotis 3 & 2 primos inter ſe.

CAP. X. DE MINIMO COMMUNI DIVIDUO.

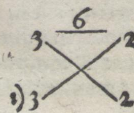
DAti duo numeri per alios multiplicati varios numeros facere possũt, ideoque & factos cõmuniter dividere: sed ex omnibus cõmuniter dividuis minimus modo quæritur, quod fundamentum postea futurum sit permagnæ utilitatis in contractionibus & proportionibus. Diuiduus á duobus minimus est factus ab altero per alterius diuisorem communi divisori maximo cognominem: ut dividuus á 12 & 8 minimus est 24: Nam maximus communis divisor in 12 & 8 est 4, á quo connominati divisores in 12 & 8, id est una quarta utriusque sunt 3 & 2. At factus á 12 per 2: vel ab 8 per 3 sunt 24, communis dividuus á 12 & 8: ab iis enim factus est, á minimis, quia factus ab altero per alterius divisorem maximo communi divisori cognominem. Exemplum ita est.



Sat vero fuerit unum divisorem cognominē invenisse: ut hic vel 3 tantum, vel 2 tantum, ut alterna multiplicatione quæsitum numerum reperias. Possunt vero dati efficere innumerabiles communiter ab utroque diuiduos, ut 8 multiplicatus per 2.3.4.5.6.7.8.9. facit 16.24.32.40.48.56.64.72: & 12 per 2.3.4.5.6. facit 24.36.48.60.72. é quibus sunt communes 24.48.72. ut hic vides.

72	72
60	64
	56
48	48
36	40
	32
24	24
	16
12	2

Sed ex iis omnibus nullus erit minor quam 24. Duo consectaria sunt ex illa generali inventione communis minimi dividui. Primum, factus á duobus inter se primis est minimus ab utroque diuiduus, ut 6 factus á 3 & 2 est minimus diuiduus ab utroque: exemplum integrum sic esset,



Secundum

Secundum consectarium est. Dividuus ab aliquo est minimus ab utroque dividuus: ut 3 est dividuus á 3, & communis est ab utroque dividuus minimus. Item 8 est dividuus á 4, & communis est dividuus ab utroque. Exemplum utrunque integrum sic esset.

3 — 3 — 3   4 — 8 — 8
3) 1 — 1   4) 1 — 2

Ergo hoc duplex compendium est é prima propositione inveniendi minimi dividui. Eadem via minimus á tribus aut quatuor, aut quotlibet dividuus invenietur. Quia repertus jam minimus dividuus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem, maximo communi divisori cognominē, est minimus ab ijs dividuus: sic minimus ab 8. 6. 4. dividuus est 24. Nam 24 est minimus dividuus ab 8 & 6: rursum idem minimus diuisus est á 24 & á 4: ut é secundo consectario patet. Sic á 3. 4. 8. minimus dividuus 24: quia minimus á 3 & 4 est 12, tum minimus dividuus á 12 & 8 est 24. Sic minimus diuiduus ab 1. 2. 3. 4. 5. 6 est 60. Hinc sequitur minimus dividuus á nominibus datarum partium, est minimus qui habeat datas partes: ut minimus dividuus qui habeat unam secundam, unam tertiam, unam quartam est 12, nempe minimus dividuus á 2. 3. 4, quique minimus bifariam, trifariam, quadrifariam dividi posit.

CAP. XI. DE NOTATIONE *partium & particularum.*

NUmeratio dicta est: sed numeri, cuius partes notationem quandam suam & reductionē requirunt, antequam numerentur. Duæ veró notæ tantúm sunt in alphabeto, notationis huius, linea interjecta separatæ, superior numerus vel numerator: inferior, nomē seu nominator appellatur. Sic divisis 8 per 3 quotus est 2, & manent duæ tertiæ, quæ ita notantur $\frac{2}{3}$: & 2 est numerus partium, 3 est nomen: qua notatione utendum est, quoties minor numerus per majorem diuidendus proponitur: peracta enim divisio est interjecta linea. Si dividam 12 asses 5 fabris: divisio sic erit: $\frac{5}{12}$, unde intelligitur singulorum partem quotam esse 5 uncias. Itaque si peracta numeri diuisione aliquid é diuidendo relinquatur, reliquus numerus interjecta linea superpositus divisori, indicat partes unitatis, quales nempe in dividēdo fuerint, tumque etiam reliqua diuisio facta est: ut si diviserim 5 asses 2 bajulis, diuisio sic erit $\frac{5}{2}$ (2 $\frac{1}{2}$, unde intelligitur singulis 2 asses & dimidium assis unius cedere. Item si 11 asses diviserim tribus, divisio hæc $\frac{11}{3}$ (3 $\frac{2}{3}$ indicabit singulorum quotam partē esse 3 asses, & duas tertias unius assis, id est 8 denarios, & similiter in cæteris: ubi in quoto, numerus integer indicabit partes numeri dividendi: partes autem indicabunt partes, non multitudinis,

titudinis, sed unitatis: hinc patet divisione legitimé peracta reliquũ numerum semper esse minorem divisore seu nomine: nam si numerus esset æqualis nomini, ut $\frac{2}{2}\frac{3}{3}\frac{4}{4}$, esset unum integrum: si major, ut $\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}$, esset plus uno integro, divisorqué & hinc & illinc subduci potuisset. Quantum veró partium numerus deficit á nomine, tot unius integri partes dividendo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur, ut in $\frac{4}{9}$ desunt $\frac{5}{9}$. Est veró in particulis & partibus partium sua quædam distincta notatio, & earum minimæ notantur, ut partes. Reliquæ nulla interjecta linea. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius secũdæ ita notabuntur $\frac{3}{4}\,{}^{2}_{3}\,{}^{1}_{2}$: ut si pater filios 2 reliquerit æqua parte cohæredes, túm filius alter filios 3 æqua item parte patrimonij, sed primus coemerit alterius fratris partem, decesseritqué quatuor filijs superstitibus, æqualiter item partitis, eorumqué primus coemerit partes secundi & tertij, hic nepos haberet ex avita hæreditate $\frac{3}{4}\,{}^{2}_{3}\,{}^{1}_{2}$.

CAP. XII. DE REDUCTIONE terminorum.

NOtatio ejusmodi est, sequitur reductio terminorum vel integrorum partiumque. Reductio terminorum fit ad minimos proportionales terminos, & est divisio terminorum inter se compositorum per maximum communem divisorem: sic $\frac{8}{12}$ per 4 communem maximum divisorem redeunt ad $\frac{2}{3}$, sic $\frac{5}{15}$ per 5 maximum communem divisorem redeunt ad $\frac{1}{3}$. Hæc reductio est imprimis necessaria, si termini partium sint compositi inter se: ut antequam numerentur partes, termini reducantur ad primos inter se: primi enim sunt minimi, & minimi sunt primi. Et quanto facilius est parvos quám magnos numeros numerare, tanto majorem commoditatem numeranti reductio hæc afferet. Itaque tãquam solœcismus in arithmetica fuerit proponere partes in terminis inter se compositis, aut non protinus reducere, ut $\frac{6}{12}$, $\frac{14}{21}$ pro $\frac{1}{2}\frac{2}{3}$. Eadem reductio etiam per numerationis species est specialis in terminis binarum partium. In additione & subductione minimus á nominibus dividuus est assumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi, alterne per partes cognomines, ut hic

6 4

$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ ubi pro $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{9}$ habes $\frac{6}{9}$ & $\frac{4}{9}$.

1 3

9

In multiplicatione numerus & nomen alternis reducuntur: ut in $\frac{2}{3}\frac{5}{6}$ reduces 2 & 6 ad 1 & 3, & multiplicabis $\frac{1}{3}\frac{5}{3}$ & facies $\frac{5}{9}$: quia idem est multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{6}$ per $\frac{5}{3}$. Itaq; tanquam $\frac{2}{6}$ rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{10}{18}$ facies $\frac{5}{9}$. Hic si numerus nomini alterno sit æqualis, reliquus numerus reliquo nomini superpositus multiplicationem absolvit, ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ omissis 3 & 3, habes $\frac{2}{4}$, id est $\frac{1}{2}$. Quin si longa hic series fuerit, æqualibus omnibus omissis, reliquus numerus cum reliquo nomine

mine multiplicationem absolvet, ut hic $\frac{8}{9}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ est $\frac{1}{9}$. In divisione numeri inter se, vel nomina inter se, vel utraque separatim reducuntur: ut si $\frac{4}{5}$ dividantur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, sumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{5}$ vel $1\frac{1}{5}$. Item si dividas $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{15}{8}$, vel $1\frac{7}{8}$: item si dividas $\frac{8}{27}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 1 & 2 pro 4 & 8: & pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$. Quapropter reductio terminorum ejusmodi est.

CAP. XIII. DE REDVCTIONE INTEgrorum *& partium.*

REductio integrorum & partium deinceps est. Reductio integrorum est multiplicatio integrorum per nomen partium: sic reducere 12 asses ad uncias est multiplicare 12 per 12, quia uncia est $\frac{1}{12}$ assis, & fiunt 144 unciæ, vel $\frac{144}{12}$. Reductio partiũ est ad integra, vel ad partes. Reductio partium ad integra, est partium divisio per suum nomen: ut reducere $\frac{144}{12}$ ad integra est dividere 144 per 12, & quotus 12 ostendit integros asses 12. Reductio partium ad partes, est ad binas partes proportionales ejusdẽ nominis, vel ad unas æquales. Reductio partiũ ad binas partes ꝓportionales ejusdem nominis est multiplicatio terminorũ per alternũ nomẽ: sic $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$ redeunt ad $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}$: multiplicãdo tũ 2 & 3 terminos $\frac{2}{3}$ per 4, tum 3 & 4 terminos $\frac{3}{4}$ per 3, proportionales autem sunt $\frac{8}{12}$ datis $\frac{2}{3}$. Nam si numerus multiplicet numeros, facti sunt proportionales multiplicatis, & sic 8 ad 2 & 12 ad 3 sunt proportionales, quia æquo majores: facti nempe per eundem. Minora enim sunt similia & proportionalia æquemajoribus, per logicum similitudinis axioma: sic $\frac{9}{12}$, item proportionales datis $\frac{3}{4}$. Aequalia veró nomina fiunt, quia 3 & 4 inter se multiplicantur, ideoqué idem faciunt. Nomina reductione eadem facta ad divisionem nihil attinent. Nam cúm reduxeris $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties in $\frac{9}{12}$ contineri, nihilo plus est, quám dicere 8 toties á 9 contineri. Itaque nominum inter se multiplicatio in divisione omittitur: ac si series reducendarum partium longior fuerit, binæ reducendæ sunt, ut in $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}$ prima reductione, atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{12}$: quæ cùm $\frac{4}{5}$ reductæ sunt $\frac{85}{60}$, $\frac{48}{60}$. Eadem via reductionis, cognoscetur é binis partibus inęqualibus utræ sint majores, ut $\frac{5}{6}$ sunt maiores quám $\frac{3}{4}$, quia facta reductione, habebis $\frac{20}{24}$ pro $\frac{5}{6}$: at habebis tantum $\frac{18}{24}$ pro $\frac{3}{4}$. Superest reductio partium ad unas partes æquales, quæ particularum variarum reductio est, & fit multiplicatione numerorum inter se, & nominum inter se. Sic $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}$ redeunt ad $\frac{6}{12}$, id est $\frac{1}{2}$. Si series longior fuerit, binæ sunt expediendæ, ut in $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$, primó facies $\frac{6}{12}$, id est $\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$, vel $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$, quia ijdẽ numeri inter se multiplicati creant eosdem. Per hanc particularum reductionem cognoscis quid sint particulæ, cúm vides quales sint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoscentur, ut $\frac{2}{7}$ triginta quinque aureorum sunt $\frac{70}{7}$, id est 10 aurei, tanquam quæreretur $\frac{2}{7}\ \frac{35}{1}$.

CAP. XIIII. DE NVMERATIONE *partium.*

ATqui partium notatio & reductio ejuſmodi eſt, unde expeditur numeratio primarum & cognominum, & quidem partium tantum, aut partium cum integris permiſtarum. Partium tantum facilis eſt, ſpectat enim tãtum numeros, excepta multiplicatione, quæ tum numeros, tum nomina vel diverſa multiplicat: ſic $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ ſunt $\frac{5}{7}$: ſic ſubductis $\frac{2}{7}$ á $\frac{5}{7}$, reſtant $\frac{3}{7}$: ſic $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$, faciunt $\frac{6}{42}$. Item $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{6}{20}$, id eſt $\frac{3}{10}$. Sic per $\frac{2}{7}$ dividantur $\frac{10}{7}$, quotus erit 5, ſignificans dividentes partes in dividendis quinquies contineri: ſi nomina diverſa ſint, vulgus etiam putat, perinde diviſionem fieri, ut ſi per $\frac{2}{3}$ dividantur $\frac{3}{4}$, numeros alterius nominibus multiplicant, faciunt $\frac{9}{8}$, at hic non eſt diviſio, ſed reductio ad partes proportionales cognomines, tanquam é $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, feciſſes $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$, & jam neglectis nominibus (quia numeri tantum hic ſpectantur) proponeres per 8 dividenda 9: tam enim per 8 divideres 9, & quotus eſſet $1\frac{1}{8}$. Atque hic factus eſt minor multiplicando, & quotus major dividendo, quod utrunque ex analogia eſt multiplicationis & diviſionis: Unitas enim major eſt multiplicante, multiplicandus igitur erit major facto: Sic inverſé alternando, unitas eſt major diviſore, ergo quotus eſt major dividendo: in diviſione tamen quotus (ut dixi) non ſignificat integra, ſed quoties diviſor contineatur in dividendo. Supereſt numeratio partium cum integris paulo operoſior: Additio nihil mutat, 2 & $\frac{2}{3}$ ſunt $2\frac{2}{3}$: $2\frac{2}{3}$ & $4\frac{2}{3}$ ſunt $7\frac{1}{3}$. Sic numeratio libellarum, aſsium, denariorũ, & ejuſmodi efficitur: ut ſi proponantur addendæ libellæ 38, aſſes 178, denarij 147 cũ libellis 23, aſsibus 289, denarijs 268. Primó colligam denarios 415, id eſt $\frac{415}{12}$. Itaque diviſo numero per nomen, habebo aſſes 34 & 7 denarios, notabo denarios 7, & ſerrabo aſſes 34 proximo loco: Deinde additis aſsib. 34 ad 178, & 28, totus erit 501 aſſes, id eſt $\frac{501}{20}$. Nam 20 aſſes faciunt unam libellam: diviſoitaque numero per nomen, habebo 25 libellas, & 1 aſſem: notabo 1 aſſem, & ſervabo 25 libellas, quibus additis ad 38 & 23, habebo libellas 86. Summa deniq; erit additionis hoc modo:

38	l	178	a	147	d
23		289		268	
86		1		7	

Subductio ex integris capit unum pro tot partibus, quantum eſt nomen: ut ſi á 2 ſubducerem $\frac{2}{3}$, ſumerem 1 á 2, pro $\frac{3}{3}$, & á $\frac{3}{3}$ ſubducerem $\frac{2}{3}$, tum é 2 manebit $1\frac{1}{3}$: ſi á $\frac{9}{7}$ tollam $2\frac{1}{3}$, reduco 2 ad tertias multiplicando per nomen 3, facio $\frac{6}{3}$, quibus additis cum $\frac{1}{3}$, habebo $\frac{7}{3}$, quibus ſubductis â $\frac{9}{3}$ manent $\frac{2}{3}$: vel reducam $\frac{9}{3}$ ad unitates diviſione numeri per nomen, habebo 3, unde tollam 2, manet 1, & ex 1 reducto ad tertias, id eſt, ê $\frac{3}{3}$ tollam $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Itaque â $\frac{9}{3}$ ſi tollam $2\frac{1}{3}$ manet $\frac{1}{3}$. Si â $2\frac{1}{3}$ tollam $1\frac{2}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. Subductio permiſtorum ejuſmodi: integrorum cum partibus ſic fieri poteſt, ut antea eſt additio facta, ſed partes ſi excedant

dant unum, commodius autem reducentur ad ſuas unitates diviſione: ut ſi ſubducendæ ſint 38 libellæ, aſſes 178, denarij 147, ê 86 libellis, 1 aſſe, 7 denarijs, reducam primò 147 denarios ad 12 aſſes & 3 denarios. Deinde additis 12 aſsibus ad 178, totus 190 reductus ad libellas, facit novem libellas & 10 aſſes: additis jam 9 libellis ad 38, totus eſt 47. Ita jam denique tollam 47 libellas, 10 aſſes, 3 denarios, reſtabunt 38 l. 11 aſſ. 4 d. Subductionis ſumma ſic erit.

38 11 4
86 l. 1 a. 7 d.
47 10 3

Multiplicatio integrorum per partes multiplicat ſubjiciendo uno pro nomine: ſic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$, id eſt 2: Integer verò cum partibus per integrum ſolũ, vel cum partib. multiplicari poteſt, & ſeparatim & coniunctim. Sic multiplico 7 $\frac{5}{13}$ per 4 $\frac{12}{13}$, prima multiplicatio 7 per 4 facit 28, ſecũda 7 per $\frac{12}{13}$ facit $\frac{84}{13}$, id eſt 6 $\frac{6}{13}$, tertia $\frac{5}{13}$ per 4 facit $\frac{20}{13}$, id eſt 1 $\frac{7}{13}$: quarta $\frac{5}{13}$ per $\frac{12}{13}$ facit $\frac{60}{169}$. Hæc omnia addita ſunt 36 $\frac{60}{169}$: idem facio ſi reducã datos numeros ad $\frac{96}{13}$ & $\frac{64}{13}$ & multiplicando faciam $\frac{6144}{169}$, & diviſione eruam 36 $\frac{60}{169}$. Diviſio etiam poteſt aliquãdo ſeparatim fieri: ut ſi per 2 $\frac{2}{3}$ dividantur 5 $\frac{1}{3}$. Primò ſubducam 2 à quinque bis, & manebit 1, id eſt $\frac{3}{3}$, quibus ad $\frac{1}{3}$ additis, habebo $\frac{4}{3}$, unde poſſum etiam bis ſubducere $\frac{2}{3}$. Itaque quotus totus erit 2: at id in diviſione majoris numeri difficilius eſſet, cum non facile videam, utrum diviſor toties in partibus contineatur, quoties in integris: ut ſi per 7 $\frac{5}{13}$ dividam 36 $\frac{60}{169}$: cùm videro 7 quinquies ſubduci poſſe ê 36, non video ex 1 reliquo & $\frac{60}{169}$ utrum toties ſubduci poſsit: at per reductionem facilius eſt.

P. RAMI ARITHMETICAE
LIBER SECVNDVS.

CAP. I. DE RATIONVM NOTATIONE *& numeratione.*



Rithmetica ſimplex adhuc fuit, comparatiua ſequitur: quæ interpretatur comparationem numerorum in quantitate & qualitate. Comparatio æqualitatis eſt una & individua: ut 1 ad 1, 2 ad 2, 3 ad 3. Comparatio inæqualium numerorum eſt differentia vel ratio. Differentia eſt comparatio quantum terminus differt à termino: ideoquè ſubductione cognoſcitur: ſic differentia 2 ad 3, & 3 ad 5, & 5 ad 8 eſt 1. 2. 3. quia cùm ſubduxeris 2 à 3, 3 à 5, 5 ab 8 relinquitur 1. 2. 3. Ratio eſt comparatio, quoties terminus in termino continetur: ideoquè diviſione cognoſcitur, datàque ratione termini cognoſcuntur contraria multiplica-

tione: sic ratio 3 ad 2 est sesquialtera, quia 3 continet 2 semel & dimidiũ: sic ratio 5 ad 2 est ratio superbitertia, quia 5 continet 3 semel & duas tertias: sic ratio 6 ad 3, est ratio dupla, quia 6 continet 3 bis: quoti igitur illi rationum indices sunt $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{2}{1}$, jam multiplica 1 per 2 nomẽ, & adde 3, erit antecedens sesquialterius rationis nomen ipsum 2 consequens: sic multiplica 1 per 3 & facto 3 adde 2: 5 erit antecedens, 3 consequens: 2 autem duplum significanti subjice 1 termini duplæ rationis erunt 2.1. Rationum arithmetica quædam est in notatione & numeratione, cùm numerandæ sunt rationes, antecedens superné, consequens inferné notatur. Numeratio autem ista longé dissimilis est simplicis numerationis. In eodem enim opere additio & multiplicatio est, subductio & divisio: ut in Euclide, Archimede, Ptolemæo, mathematicisq; antiquis perspicies. Additio rationum est multiplicatio terminorum inter se similium, id est, antecedentium inter se, & consequentium inter se, & compositio rationum dicitur, sic ratio $\frac{1}{1}$ addita rationi $\frac{2}{1}$ est ratio $\frac{2}{1}$, quia ratio æqualitatis nil auget, sic ratio $\frac{3}{1}$ addita rationi $\frac{4}{1}$, est ratio $\frac{12}{1}$. Sic ratio $\frac{3}{2}$ addita rationi $\frac{5}{3}$ est ratio $\frac{15}{6}$: sic duplicari, triplicari ratio dicitur, quando rationis bis ac ter positæ termini multiplicantur: sic duplicatur & triplicatur ratio $\frac{3}{2}$, quando termini ita multiplicantur $\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}(\frac{9}{4}: \frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.(\frac{27}{8}$. Ergo additio rationum est multiplicatio terminorum. Itaque si termini rationum sunt quomodocunque continui, ratio extremorum componetur ex omnibus intermedijs rationibus: ut in 1.2.3.4.5.6. ratio 1 ad 6 componitur ex omnibus intermedijs rationib. ut hìc vides $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\frac{5}{6}(\frac{120}{720}$. Nam ratio 120 ad 720 est ratio 1 ad 6, ut patet reductione. Hæc ex Euclide arithmetica est. Subductio rationũ est divisio terminorum, ut tollatur ratio $\frac{1}{2}$ á ratione $\frac{3}{2}$ relinquetur ratio $\frac{3}{1}$: Hæc utraque numeratio apud Ptolemæum in musica & astrologia additio & subductio nominatim appellatur. Quare summorum mathematicorum usus notabilis est, ne quis error ex ambiguitate oriatur.

CAP. II. DE GENERIBUS *rationis.*

RAtio inæqualitatis est majoris vel minoris. Ratio inæqualitatis majoris nominatur á majore termino, sed minoris præponendo sub: ut ratio 2 ad 1, dicitur dupla, 1 ad 2 subdupla. Ratio est prima aut conjuncta. Prima quæ unicam speciem rationis habet, eáque simplex est aut multiplex. Simplex cum major terminus continet tantum semel minorem, & aliquid præterea, ut ratio superparticularis & superpartiens. Superparticularis ratio est, quando terminus terminũ semel tantum continet, & præterea unam partem: si secundam, tertiam, quartã, dicitur sesquialtera, sesquitertia, & sic deinceps, ut hîc:

3	4	5
2	3	4

Partes veró reliquæ in doctrina rationum demonstrant non partes unitatis in di-

in diviſo, ut in doctrina partium, ſed partes minoris termini, ut in ratione 3 ad 2, quotus $1\frac{1}{2}$ demonſtrat 2 contineri ſemel in 3, & præterea unam ſecundam ejuſdem 2. Ratio ſuperpartiens eſt, quando terminus terminum continet ſemel, & præterea aliquot partes, ſi duas tertias, tres quartas: quatuor quintas dicitur ſuperbitertia, ſupertriquarta, ſuperquadriquinta: ut,

5	7	9
2	4	5

Ratio multiplex eſt, quando terminus terminum continet ſæpius exacté, ſi bis, ter, quater, ratio dicitur dupla, tripla, quadrupla: ut,

2	3	4
1	1	1

Ratio conjuncta eſt, quæ multas rationis ſpecies continet, ut ratio multiplex, ſuperparticularis, & ratio multiplex ſuperpartiens. Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, quando terminus terminum ſæpius continet, & præterea partē unam, ut dupla ſeſquialtera, tripla ſeſquitertia, quadrupla ſeſquiquarta: ut hîc vides,

5	10	17
2	3	4

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, quando terminus terminum continet ſæpius & præterea plures partes, ut dupla ſuperbitertia, tripla ſuperbiquarta, quadrupla ſuperquadriquinta: ut hîc vides,

8	15	24
3	4	5

Sic igitur ſpecies rationis ſubtiliter explicatæ ſunt, & generatim comprehenſæ duabus regulis, altera diviſionis ad ſpeciem, altera multiplicationis ad terminos rationis inveniendum: ac etiam multó breuius ſolis terminis, arithmetica hæc tota de generibus rationum expediri & exerceri poteſt, ut á magnis quoq; mathematicis exercetur: longitudo habitabilis terræ, major latitudine, quám 5 ad 3, inquit Ariſtoteles 5. cap. 2. Metheor. Ratio circuli ad diametri quadratum eſt, ut 11 ad 14, inquit Archimedes de dimenſione circuli, pro ratione ſuper bitertia, item pro ratione ſuper triundecima: Itaque ſoli propoſiti termini nomen ſpeciei referent, & quidem in proportionibus, id eſt in ipſo rationum uſu, ubi rationum ſpecies nuſquam appellatur: nomina tamen illá ſpecialia interdum á Mathematicis appellantur: itaque etiam tenenda.

CAP

CAP. III. DE PROPORTIONE *Arithmetica.*

SEquitur cõparatio in qualitate numerorũ, quæ proportio dicitur, eáq; arithmetica aut geometrica. Proportio arithmetica est æqualitas differentiarum: ut in 12.10.8.6: utrobique enim est 2 pro differentia etiam inversè & alternè: ut enim 6 ad 8, sic 6 ad 12: una enim differentia 2 est. Item ut 12 ad 8, sic 10 ad 6. Differentia enim utrobiq; est 4. Proportionis arithmeticæ proprietates duæ sunt, in disjunctis primò. Medius simuluterque est æqualis simulutrique extremo, & factus à medijs superat factum ab extremis facto à differentia maximi supra medium per ejusdem medij differentiam supra minimum, ut in 12. 10.8.6.10 & 8 sunt 18, item 12 & 6 sunt 18: ut factus à medijs est 80, qui superat 72 factum ab extremis 8 facto à 4 differentia primi 12 supra medium 8 per 2 differentiam ejusdem medij 8 à minimo 6. Prima proprietas suppeditat inventionem mediorũ, inter duos datos. Nam simulutriusque dati duæ qualescunque partes, sunt medij arithmeticè proportionales inter datos: ut inter 2 & 10: hîc uides,

	12		
2.	1	11	10.
	2	10	
	3	9	
	4	8	
	5	7	
	6	6	

Secunda proprietas requirit numeros extremos & medios quantitate, non solum ordine, ut in 12. 8. 16. 12. 128 factus à medijs non superat 144 factum ab extremis. Ex his duabus proprietatibus disjunctæ proportionis arithmeticæ duæ aliæ deriuantur in continua. Medius est dimidius extremi simulutriusque, & factus à medijs superat factum ab extremis, factum à differentijs: ut in 3.5.7. Nam 3 & 7 sunt decem, quorum dimidius est 5: item 25 factus à 5 in se multiplicato superat 21 à 3 & 7, factum 4 facto à 2 & 2 differentijs, 2 à 5 & 5 à 7. E prima proprietate oritur inventio medij sumpto duorũ datorum dimidio. Proportionis arithmeticæ continuæ termini quantumlibet continuari possunt, & progressio arithmetica vulgò dicitur, & in ea inventio duplex est: prima optati termini hoc modo. Si tollatur unitas à nomine termini optati, factúsque à reliquo per differentiam addatur primo termino, totus erit optatus: ut in progresione quaternaria ab unitate, si quæratur decimus terminus, hic decimus nomen est termini, tolles 1 à decem, & à reliquo 9, per 4 differentiam facies 36, quo ad 1 addito, totus erit 37, decimus terminus quaternariæ progresionis ab unitate sic, 1.5.9.13.17.21.25.29.33.37. Secunda inventio est summæ, ut sequitur: factus à simulutroque extremo per dimidiatum nomen termini ultimi est summa, ut in proxi-

proxima progreſsione adde 1 & 37, totus erit 38, qui per 5 dimidiatum nomen ultimi termini, facit 190 ſummam. Idem erit factus á nomine ultimi termini, 10 per 19 dimidium ſimulutriuſq; extremi. Si paciſcatur cum domino ſeruus annuam ſibi mercedem progreſsione arithmetica, primoque die teruncium unicum, ſecundo quatuor, tertio ſeptem, & ſic deinceps, quæritur anno vertente, quæ ſumma mercedis erit. Primum pro teruncio potes ſumere uncias 3, & facere 3 primum terminum, quære ultimum: quoniam trecenteſimus ſexageſimus ſextus eſt, reperies 1098. Iam ſimuluterque erit 1101, dimidiatum nomen ultimi termini eſt 183, ab ijs factus eſt 201483 unciæ, id eſt libellæ vicenorum aſsium: 839 $\frac{123}{240}$, vel 10 aſsium, & teruncii unius.

CAP. IIII. DE PROPORTIONE GEOMETRICA, *dequé ejus regula aurea.*

PRoportio arithmetica ſic eſt, geometrica ſequitur, in rationum æqualitate, & hic proprié proportio numerorum, & proportionales numeri dicuntur, ut 3.6.4.8. túm directê, ut 3 ad 6, ſic 4 ad 8: túm inverſê, ut 8 ad 4, ſic 6 ad 3: & alternê, ut 3 ad 4, ſic 6 ad 8. Proprietas hîc item duplex eſt, ut in arithmetica proportione, primo in diſjunctis terminis: ut, maximus & minimus reliquis ſunt majores, & factus â medijs æquatur facto ab extremis, ut in eodem exemplo 3 & 8, id eſt 11, majores ſunt 6 & 4, id eſt 10: item 24 factus á 6 & 4, mediis æquatur 24 facto á 3 & 8 extremis: prima tamen proprietas non convertitur ut ſecunda: nec enim verum eſt, ſi quatuor numerorum maximus & minimus reliquis ſunt majores, iccirco proportionales eſſe, quod in ſecunda proprietate perpetuum eſt. Si quatuor numeri ſunt proportionales, factus á mediis, æquat factum ab extremis: & contrá ſi æquat, ſunt proportionales. Hæc proprietas propter admirabilem uſum, vulgo regula aurea dicitur, & certê ſi quid auro pretioſius eſſet, eo quoque nomine digna eſſet. Hinc patet inventio mediorum datis extremis, & quarti tribus datis. Nam diviſor facti ab extremis, & quotus ſunt medij proportionales: ut datis 4 & 3 extremis, factum ab ijs 12, dividens 2 & quotus 6 ſunt medii: item ſi ê tribus datis primus dividat factum á reliquis, quotus erit quartus proportionalis: ut ê datis 4.2.6. primus 4 dividat, & factum á 2 & 6: quotus 3 erit quartus proportionalis. Quartus autem proportionalis ab exercitatis in arithmetica, ſine aurea regula, frequenter expedietur ex ſola proportionis definitione, præſertim in ſuperparticularibus & multiplicibus: ut ſi quæratur, ut 8 ad 12, ſic 10 ad quem? vel, ut 2 ad 4, ſic 3 ad quem? Illic videbũt ſecundum primi ſeſquialterum eſſe, hîc duplum: ideoque quartum tertio perinde rationalem eſſe, id eſt 15: id eſt 6. Ita ſi quæratur cum imperij vectigal annuum eſt 12, tum Aſia pendit 4: ſi præterea 15 imperẽtur, quota erit Aſiæ portio? Reſpondebis, 5. nam ut 12 eſt triplus ad 4, ſic 15 triplus ad 5. In ſuperpartiẽtibus & conjunctis rationibus id minus promptum fuerit. Sed tamen regulæ aureæ uſus per ſeſe immenſus eſt per omnia rationum genera. Eſt enim analogiſmus proportionis in arithmetica, quod ſyllogiſmus argumentationis in logica. Propor

tio disjuncta est terminis quatuor simplex, aut pluribus multiplex. In simplicis & directæ quæstionibus imprimis spectandus est ordo terminorum: ut nempe primus primo loco sit, ut cæteri suo, primusque sit homogeneus tertio, & secundus quarto: id enim sic alterné quæri solet, & proportio tractatur commodius: denique tertius sit qui facit quæstionem. Itaque si confusius (ut solet) quæratur, redigantur in ordinem termini: ut si quæratur quot horæ sunt in 6 diebus, cúm in 3 sint 72. Hîc quæstio est tertij termini, quæstionisque proportio sic expedietur: 3 dies sunt horæ 72: ergo 6 dies erunt horæ 144. Hîc primus terminus & tertius sunt homogenei: sunt enim de diebus, secundus item & quartus: sunt enim de horis, & tertius facit quæstionem, quæ quarto proportionali invento solvitur. Interdum dantur tres termini, sed obscurius, ut si quæratur $\frac{3}{4}$, quot sunt $\frac{1}{12}$? Hic terminos tres habes 4.3.12. Itaque quarto proportionali invento responde bis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{9}{12}$. Idem veró sit quærere, quot sunt $\frac{1}{12}$ in $\frac{3}{4}$?

CAP. V. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, SIMPLIcem integrorum numerationem ante requirentibus.

PRincipem proportionem antecedit, alia quædam modó simplex numeratio, modó proportio. Exempla cujusque generis proponimus: ut aromatum pondo 1000 in Lusitania empta sunt nummis 10000, proque his vectigal pensitatum nummis 1000: naulum Rhotomagum usque fuerit 300: ibi deinde vectigal 500: vectura Lutetiam usque 200: accesserit ministrorum impensa 2000: mercator lucrari vult in singulas libras 4, id est pro tota summa 4000? Additis impensis illis omnibus summa erit 18000. Iam dicito: 1000 pondo dant impensas 18000: ergo 1 dat 18, additionis hoc exemplum est. Centum libras emit mercator 10 aureis, vendidit 12, quantum lucri fuisset ex aureis 100? Primó videbis subducta sorte á lucro, lucrum 10 aureorum esse aureos 2. Tum igitur per regulam auream dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item si libra 3 aureis empta venderetur tantum 2, quanta esset jactura ex aureis 100? Hic cúm videris per subductionem sortis á jactura, jacturam in 3 esse 1: túm dices per auream regulam 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt $33\frac{1}{3}$. Hæc exempla subductionis sunt. Si confundantur res heterogeneæ reducendæ sunt prius ad idem genus: ut si quæratur. Hebdomadæ tres horas habent 504, dies 4 quot horas habent? Hebdomadas 3 rediges multiplicatione 7 ad dies 21: tumque dices, 21 dies sunt horæ 504: ergo 4 sunt 96. Item emit mercator doliũ vini aureis 8, lucrari vult 2, quanti pintam vendet? Hic rediges dolium ad 288 pintas: tot enim cõtinet: item aureos 8 emptionis, & 2 lucri, id est 10, ut pretium utrunque conjungas, rediges ad denarios 6240, cúm aureus sit assium 52. Túm dices per auream regulam, 288 pintæ valent denarios 6240: ergo 1 pinta valet $21\frac{192}{288}$, id est $\frac{2}{3}$: sed hic additio est & multiplicatio, ut in tribus exẽplis proximis. Commuta 3 aureos in asses, semisses, quadrantes, æquali singulorum generum numero, quot asses, quot semisses, quot quadrantes dabis? Commuta 3 aureos in asses, id est in $\frac{1}{52}$ habebis 156: deinde asses in minimam propositarum monetam, ut in quadrantes, habebis 624,

bis 624, quales aſsis valet 4, ſemiſsis 2, quadrans 1. Hi valores 4.2.1. additi ſunt 7: unde proportio concludetur, 7 continet ſemel ſingula quæſita genera: ergo 624 continent octogies novies cum $\frac{1}{7}$, adde ſingula hæc genera, ſumma aſsium redibit. Termini proportionis ita ſunt 7.1.624.897. Emo 4 aureis æquali numero libras piperis, zingiberis, amygdalarũ, ſaccari, quot ê ſingulis generib. libras habebis? redige ut antea, aureos ad aſſes 208, tùm vide quantũ ex ijs aſsib. valeat libra ſingulorum generũ: ut libra piperis 25, zingiberis 25, amygdalarũ 5, ſaccari 12, pretijs his additis, totus eſt 67, jam proportionem conclude, 67 aſſes dant 1 libram ſingulorum generum: ergo 208 dant $3\frac{8}{67}$. Hæc ſi multiplices pretijs ſingulorum generum inventum numerum reſtitues 208 aſſes. Pauló diſſimile eſt proximum, in quo duo termini proportionis primi comprehenduntur propoſita ſpecie: ut ad quem numerum 12 eſt duplus ſuperbipartiens quintas? Hic pro duobus rationis terminis habes ſpeciem, quæ ita picta $2\frac{3}{5}$, multiplicatione quoti integri per nomen, & additione numeratoris reſtituet 13 pro antecedente, 5 autem pro conſequente, & termini proportionis tres ſic erunt: 13.5.12. am regula aurea invenies pro quarto $4\frac{8}{13}$. Aliquando eſt multiplicatio & ſubductio: ut Curſores 2 Lutetia Romam contendunt, ſed primus 20 millia paſſuum quotidie conficit, ſecundus 33, primus 6 diebus præceſſerit, quando ſecundus aſſequetur? Hîc intelligis quotidie ſecundo tantundem conficiendum eſſe, quantum primus conficiat, & præterea 13. imprimis igitur collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum ſume 13 exuperantiam ſecundi, & dic: Secundus conficit 13 millia uno die ſupra primum, idem 120 millia, quot diebus ſupra eundem conficiet? proportio ſic eſt, 13. 1.120.$9\frac{3}{13}$. Diviſio etiam antecedere poteſt, ut 1 dolium valet 4 coronatos, pintæ 2592, quantum valebunt? reduces pintas 2592 ad 9 dolia dividendo, nempe 2592 per 288, quæ 1 dolium faciunt, & tunc alterni termini erunt homogenei, regulaque aurea tum ſic erit, 1 dolium valet 4 aureos: ergo 9 dolia valebunt 36 aureos.

CAP. VI. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, *ſimplicem fractorum numerationem ante requirentibus.*

ATque hæc exempla integrorum numerorum fuerunt: ſequentia ſunt fractorum. Perſolveris æris alieni $\frac{1}{3}$, deinde $\frac{1}{4}$, & reſtent decem aurei, quantum erat totum æs alienum: additæ partes ſunt $\frac{7}{12}$, reliquũ igitur eſt $\frac{5}{12}$: unde quæſtionis proportio concluditur: 5 valent 10 aureos, ergo 12 valent 24. Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur ſub aqua, reliqua pars 60 cubitis ſupra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additæ ſunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valent 60, unde concludes:

4 48
5 valent 60: ergo
3 36

Talis est quæstio duplex Græcorum epigrammatum, primi de statua Palladis.

Pallas ego sum malleata, sed aurum
juvenum est, donum poetarum.
Dimidium quidem auri Charisius, octauam autem
Thespis, & decimam partem posuit Solon,
Sed vigesimam Themison, reliqua veró talenta
Novem, & ars, donum Aristodici: Quantum singuli contulerunt?

Adde partes, habebis $\frac{31}{40}$. Itaque reliqua 9 ad complendum totum, valent 9 proposita. Hic accidit eundem esse numerum propositum, & reliquum, ut quartus sit æqualis tertio. Summa itaque est 40. Charisius ergo contulit 20: Thespis 8: Solon 4: Themison 2. In proximo epigrammate res alia est.

Augeam interrogavit magna virtus Alchidæ
Multitudinem armentorum quærens, ipse veró respondit:
Circa quidem Alphei fluvium, amice, dimidium quidem horum:
Pars autem octava collem Saturni circumpascuntur.
Duodecima autem secessit Taraxippi ad montem.
Circa veró Elidem divinam vigesima pascuntur.
Verum in Arcadia trigesimam reliqui.
Reliquos autem videto greges, sic quinquaginta.

Quanti igitur erũt greges singuli? additæ partes sunt $\frac{95}{120}$: Reliqua igitur 25 ad ex plendũ totum valẽt 50: ergo 120 valent 240. Itaque $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ sunt 120: 30. 20. 12. 8: fractorum veró numerorum numeratio paulo operosior est in terminis proportionis: ut, Unius moletrinæ tres molæ molunt 12 horis modios, prima 18, secunda 13, tertia 8, quot horis universæ molent modios 24? & quantum singulæ? adde primum 18. 13. 8, habebis 39. prima quæstio sic erit: 39 modii moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur $\frac{96}{13}$, id est horis 7 $\frac{5}{13}$. Hic antecedit unica additio: at in tribus quæstionibus de tribus molis intercurrunt partes, in quibus vitandæ molestioris numerationis gratia pro 7 $\frac{5}{13}$, assumes $\frac{96}{13}$: singulæ igitur quæstiones sic erunt. Prima mola molit 12 horis 18 modios: ergo $\frac{96}{13}$ molent 11 $\frac{12}{13}$. In secunda & tertia dicito, 12 dant 13: ergo $\frac{96}{13}$ dabunt 8: item 12 dant 8: ergo $\frac{95}{13}$ dabunt 4 $\frac{12}{13}$.

CAP. VII. DE EXEMPLIS AUREAE REGULAE, PROportionem antecedentem requirentibus.

PRoportionis antecedentis principem proportionem sequentia deinde exempla erunt, & primum de proportione arithmetica antecedente. Putearius quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu geminarum operarum. Effossis autem brachijs 20, ægrotare cœpit, mercedemque debitam rogavit, quanta igitur ea est? Hic victus nihil variat, sed arithmeticæ progressionis usus hic est ante proportionis geometricæ conclusionem. Nam

ſecundum brachium, laborem primi feré continet, & tertium utriuſque, & ſic deinceps arithmetica gradatione labor creſcit: Itaque ſumma integræ progreſsionis 34, brachiorum eſt 595: & ſumma progreſsionis 20 brachiorum, eſt 210. Jam ad proportionē conclude: ut 595 ad 60: ſic 210 ad 21 $\frac{105}{595}$, vel $\frac{3}{17}$. In ſequentibus exemplis geometrica proportio antecedit cum numeratione ſimplici aliqua. Curſor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit, curſor alius velocior Lugduno Lutetiā idem iter conficit, diſcedant hodie meridiano tempore, quando & ubi inter ſe occurrent? Præpone proportiones antecedentes, ſic. Primus 5 diebus totū iter conficit: Ergo uno die cōficit $\frac{1}{5}$ itineris. Secundus 3 diebus conficit iter: ergo uno die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes additæ ſunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur, $\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die: ergo $\frac{15}{15}$, id eſt 1 conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id eſt 1 die, & ſequentis $\frac{7}{8}$, hoc tempus eſt concurſus, id eſt perendie nona matutina: Ubi proportio duplex & additio partium unica antecedit: in eiuſmodi autem exemplis, ubi totum & integrum ſcriberetur, ut $\frac{15}{15}$, commodius erit aſſumere 1, quia $\frac{15}{15}$ reductæ nihil aliud ſunt, quám 1. Reliqua autem quæſtio deinde facilior eſt. Primus 5 diebus conficit 1: ergo $\frac{15}{8}$ diei conficiet $\frac{15}{40}$ itineris, id eſt $\frac{3}{8}$. Secundus conficit 3 diebus 1. Ergo $\frac{15}{8}$ cōficit $\frac{15}{24}$, id eſt $\frac{5}{8}$. Locus igitur cōcūrſus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris á primo cōfecti, & ad $\frac{5}{8}$ á ſecūdo confecti. E' duob. architectis prim⁹ abſolveret ędificiū 20 dieb. cū ſecūdo abſolveret 14: quot igitur diebus ſecundus ſolus abſolveret? Dicito primū 20 dies abſolvūt 1, id eſt totū: ergo 14 abſolvet $\frac{14}{20}$, id eſt $\frac{7}{10}$. Itaq; ſecūdus abſolvit 14 diebus $\frac{3}{10}$, jam conclude, $\frac{3}{10}$ fiunt 14 diebus. Ergo 1 fit diebus 46 & $\frac{2}{3}$ diei, id eſt horis 16. E' quatuor architectis ædificium totum abſolveret primus 1 anno, ſecundus 2, tertius 3, quartus 4: Si omnes ſimul adhibeantur, quanto tempore abſolvent? Secundus 2 annis abſolvit totum opus: ergo uno anno abſolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$: adde jam ſingulorum opus $1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, habebis $\frac{25}{12}$: unde concludes de architectis quatuor, $\frac{25}{12}$ fiunt 1 anno: ergo 1 fiet $\frac{12}{25}$ unius anni, id eſt 5 mēſibus, & $\frac{19}{25}$ unius menſis. Hic triplex proportio antecedit, & partium triplex additio. Talia ſunt exempla duo ſequentia. Leofontis quatuor fiſtulas habet, quarum prima implet ſubjectum lacum 24 horis, ſecunda 36, tertia 48, quarta 6: ſi ſimul fluant, quot horis implebunt? facito proportiones antecedentes, 24 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus: 36 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus: 6 horæ implent 1: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{37}{144}$, quales 144 totum faciūt. Dices igitur 37 partes lacus implentur 1 hora. Ergo 1 impletur $\frac{144}{37}$, id eſt 3 horis, & $\frac{33}{37}$ unius horæ. Hic antecedit proportio quadruplex & additio partium triplex. Proximum exemplum facilius etiam eſt.

Lacus fontis tres fiſtulas habet, quarum prima vacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, ſecūda $\frac{1}{2}$, tertia hora 1, quanto tempore fluentes ſimul omnes vacuant lacum? Dices hic ut antea: $\frac{1}{4}$ horæ vacuat ſemel, ergo 1 hora vacuat quater: item $\frac{1}{2}$ vacuat bis, 1 hora ſemel: adde has vices, habes 7, & dicito. Lacus vacuatur ſepties 1 hora:

ergo vacuatur semel $\frac{1}{7}$ horæ: termini ita sunt 7. 1. 1. $\frac{1}{7}$. Hic antecedit triplex, sed simplex additio est, & integrorum. Duo exempla reliqua breviora & faciliora sunt.

E duobus architectis primus absolveret 30 diebus, secundus 40: tertio autem addito 15 diebus absolvunt, quot diebus tertius solus effecisset? Primus 30 diebus absolveret totum ædificium. Ergo 15 diebus absolvet $\frac{15}{30}$ ædificii, id est $\frac{1}{2}$. Secundus absolveret 40 diebus 1: ergo 15 diebus absolvet $\frac{15}{40}$, id est $\frac{3}{8}$: adde jam $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ habebis $\frac{7}{8}$, quibus subductis ex $\frac{8}{8}$, restat $\frac{1}{8}$, quam tertius est effecturus illis 15 diebus. jam denique dicito, $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo 1 efficitur 120 diebus. Hic antecedit proportio duplex & subductio partium una, ut in proximo. Fons duas fistulas habet, prima implet lacum horis 4, si sola fluat, secunda vacuat horis 11, si illa obstructa sit: si unà fluant, quot horis implebitur lacus? Distinguito proportiones antecedentes & dicito: 4 horæ implent lacũ. ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus: deinde 11 horæ vacuant lacum: ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. jã ut sola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, restabũt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora: unde quæstionis proportio concludetur: $\frac{7}{44}$ lacus implentur 1 hora: ergo 44 implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id est 6 horis, & $\frac{2}{7}$ unius horæ.

CAP. VIII. DE RECI-*procatione.*

PRoportio simplex directa sic est: plerunque autem reciprocê invertitur: Proportio reciproca est, quando est ut primus terminus primæ rationis ad primum terminum secundæ: sic secundus terminus secundæ est ad secundum primæ: ubi homogeneorum tantum ratio sumenda est, ut potentiarũ inter se, temporum inter se, pretiorum inter se, mensurarum inter se: tumque de terminis reciprocæ proportionis tertius quæritur. Itaque factus ab extremis divisus per datum ê mediis alterum dabit reliquum in quoto. Hac proportione utendum est quoties auctis vel minutis momentis res contrà minuũtur, vel augentur, pro ratione potentiæ, temporis, ponderis, pretii, mensuræ. Quod diligenter animadvertendum est, ne periculoso errore directa proportio pro reciproca concludatur: quod facilius ê numeratis rebus animadverti potest, quàm ex ipsa numerorum natura. Sed res exemplis intelligatur: ut si quæstio sit de aratione 10 jugerum, & dicatur, 15 boves arant 8 diebus: ergo 20 boves arabunt 6 diebus. Exemplum quæstionis & conclusionis sic erit, ut reciprocatio cernatur.

15	20
8	6

Eadem proportio inverso terminorum ordine concluditur sic, 6. 15. 8. 20: ubi de tribus datis terminis ultimo loco prolatus erit primus, primo loco positus erit ultimus: quęsitus autem erit tandẽ proportionis inversæ ultimus. Atqui in hoc exemplo & similibus omnibus terminis idem sæpius iteratus rejiciẽdus est, ut

est,ut hic 10. Atque sic termini in reciprocatione homogenei faciunt rationem, boves nempe primæ cum secundis faciunt primam rationem,secundi dies cum primis faciunt secundam. Hujus inversionis isorropicum illud est Aristoteli 10. cap.8.Phys. Si potentia sit in quodam tempore tanta, major erit in minore κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν τῆς ἀναλογίας, secundum conversionem proportionis: item 1 cap.1. de cælo, Proportionem quam habent pondera, tempora ἀνάπαλιν, id est, inverso modo habebunt: ut si dimidium pondus in tali, duplum in dimidio hujus. Hic analogiam τὴν ἀνάπαλιν appellat, quam illic appellauit τὴν ἀντιστροφὴν τῆς ἀναλογίας. Pondera motib. sunt reciproca: ait Jordanus 1 p. de ponderib. Isorropicũ Aristotelis theorema imitatus, & sic Archimedes. Si põdera sunt ęquipondia, sunt reciproca radijs: sic Campanus citat á Boetio, si nervus secetur in cithara, segmenta sonis esse reciproca. Verum esto Aristotelea proportio. Pondus 20 librarum descendit horis 2: pondus igitur 40 librarum descendit 1 hora. Proportionis termini ita sunt.

20	40
2	1

ubi sicut antea facit reciprocas rationes ex homogeneis rebus, primam é ponderibus 20, & 40: alteram ex 1 hora, & 2. Amphora vini una sufficit 3 dies 30 convivis, eadem 6 dies, quot convivis sufficiet? Termini proportionis ita sunt.

3	6
30	15

Commeatus suppetit 7 menses, 3000 obsessis militibus: 12 menses quot obsessis suppetet? Termini proportionis ita sunt.

7	12
3000	1750

Cúm modius tritici vænit 5 aureis, tum panis est 4 unciarũ: ergo cúm vænit 3, panis erit unciarum $6\frac{2}{3}$: sic $\frac{5}{4}$. $\frac{3}{6}$. $6\frac{2}{3}$

Tres mercatores lucrati sunt tricenos aureos, primus per 6 menses ex aureis 60, secundus per 7, tertius per 5, ex quanam uterque sorte? Hic 30 communis est terminus. Itaque rejiciendus, & tantum considerandum, ad lucrum commune 6 menses occupant 60 aureos: ergo 7 minus occupabunt, & 5 menses plus occupabunt. Termini sic erunt.

6.	7.	5.
60.	$51\frac{3}{7}$.	72.

CAP. IX. DE COMPOSITA PROPORtione per additionem.

HActenus proportio simplex fuit in quatuor terminis: sequitur multiplex, ubi termini plures quatuor usurpantur: idque compositione vel continuatione. Compositio terminorum est prima aut secunda: prima ut additio & alligatio. Additio est, cùm termini datæ proportionis adduntur: estque triplex, prima est additio antecedentis cum consequente ad consequentem: ut 4 ad 3, sic 8 ad 6: ergo ut 7 ad 3: sic 14 ad 6. Secunda est additio complurium antecedentium ad unum consequentem, vel unius antecedentis ad plures consequentis: ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: & 8 ad 4, sicut 12 ad 6: ergo 10 ad 4, sicut 15 ad 6: item ut 6 ad 2, sic 9 ad 3, & ut 6 ad 4, sic 9 ad 6: ergo ut 6 ad 2 & 4, sic 9 ad 3 & 6. Hæc utraque compositio frequentior est in demonstrationibus scholasticis, quàm in populari usu. Prima tamen frequentior: secunda ad 31 p 6. adhibetur ad insignem imprimis demonstrationem, ut ab Archimede ad circuli dimensionem. Tertia est additio omnium antecedentium ad omnes consequentes, ubi dantur consequentes quidem additi, antecedentes autem separati, tumque antecedentes omnes adduntur, & separati ad omnes consequentes concluduntur. Itaque sola hic fit additio antecedentium ad primum proportionis terminum constituendum. Hæc compositio utilitates infinitas habet, & propter quotidianum usum, in consortio & societate hominum, vulgô regula societatis appellata est, sed verius æquitatis & politiæ regula diceretur: & certè velut dea quædã justitiæ & æquitatis suum cuiq; partitur, ac tribuit. Quapropter nobilitas tanta exemplis suis illustretur.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantũ singulis accedit? Quæstio additis antecedẽtibus ita solvetur.

	8	4
14 dant 7: ergo		
	6	3

& contra sors concluditur:

	4	8
7 dant 14: ergo		
	3	6

Hic & deinceps tertius terminus datur potestate, non actu, quod antea initio regulæ aureæ admonitũ est. Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, secundus 60, tertius 50, lucrati sunt aureos 100, quantum singulis accedit? Adde antecedentes, ut antea, & conclude.

	90	45
200 dant 100: ergo	60	30
	50	25

Contrà

Contrà singulares sortes ex additis consequentibus concludentur.

	45	90
100 dant 200:ergo	30	60
	25	50

Aurei 200 tribus ea conditione partiēdi, ut primus triplo plus habeat quàm secundus, & secundus quadruplo quàm tertius, quota pars erit singulorum? Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, secundus habebit 4, & primus 12, quibus additis conclude.

	12	$141\frac{5}{17}$
17 dant 200:ergo	4	$47\frac{1}{17}$
	1	$11\frac{13}{17}$

Hæc exempla speciem quandam justitiæ habuerunt, sequentia longè sunt insigniora, in quibus judex in tribunali sine compositionis hujus æquitate sit iniquus: Octo creditoribus debentur aurei, primo 100, secundo 86, tertio 75, quarto 60, quinto 54, sexto 32, septimo 24, octavo 15. Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino satisfieri non potest. Ac si totam summam primo summo jure persolveris: summam cæteris injuriam facies. Secundo enim 36 detrahes, nihil cæteris prorsus relinques. Ad compositionis igitur æquitatem recurretur, quantum singulis pro rata bonorum portione persolvendum sit, ex additis antecedentibus ita concludes:

	100	$33\frac{141}{223}$
	86	$28\frac{106}{223}$
	75	$25\frac{50}{223}$
446 dant 150:ergo	60	$20\frac{117}{223}$
	54	$18\frac{36}{223}$
	32	$10\frac{170}{223}$
	24	$8\frac{16}{223}$
	15	$5\frac{10}{223}$

Hæreditas 3000 relicta 5 fratribus ea conditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id uti proponitur fieri nō potest, quia é datis partibus prima aufert 1500, secunda 1000, tertia 750, quod jam plus est toto. Itaque cæteris nihil relinqueretur. Atque ex illo summo jure summa item fieret injuria. Recurratur igitur ad compositæ proportionis æquitatem, & numerus inveniatur minimus dividuus á datis partibus. Hic enim est usus talis numeri, quoties datæ partes totum superant, & inventi partes inveniantur datis illis cognomines, quæ æquabiliter 5 fratribus assem partiantur. Id veró per additionē partiū absq; minimo dividuo fieri potest, sed expeditior erit numeratio per integros numeros dividui minimi beneficio repertos. Minimus igitur dividuus á datis partibus est 60, cujus partes partibus illis datis cognomines, sunt 30. 20. 15. 12. 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam.

	30	$1034\frac{42}{87}$
	20	$689\frac{57}{87}$
87 dant 3000: ergo	15	$517\frac{21}{87}$
	12	$413\frac{69}{87}$
	10	$344\frac{72}{87}$

Tres partiūtur 100, ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, secundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item sicuti proponitur fieri non potest, quia primus & secundus auferunt plus toto. Aequitas igitur additionis adhibeatur. Itaque sumes primo minimum dividuum 60, cujus divisores datis partibus cognomines, sunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro secundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primum separatim additis sunt 35. 27. 22. Deinde simul sunt 84. Conclude igitur:

	35	$41\frac{2}{3}$
84 dant 100: ergo	27	$32\frac{1}{7}$
	22	$26\frac{4}{21}$

Consimile est exemplum consequens, sed pauló plenius, & luculentius. Quatuor sic partiūtur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, secundus $\frac{3}{5}$ & 8, tertius $\frac{5}{6}$ & 7, quartus $\frac{7}{8}$ & 6. Hic item partes duæ primæ superant totum, neque quidquam cæteris præterea relinquitur. Ad illud igitur proportionalis æquitatis judicium refugiamus, & quinque in hoc exemplo superiorum dissimilia distinguamus. Primo á nominibus propositarum partium assumēdus minimus

divi-

dividuus est, sic erit 120. Secundo partes cognomines inveniendæ. Tertió inventæ per suos numeros multiplicandæ Itaq; $\frac{2}{3}$ erunt 80: $\frac{3}{5}$ 72: $\frac{5}{6}$ 100: $\frac{7}{8}$ 105: quæ additæ erũt pro antecedentibus additis. Quartó á 600. summa dividenda tollantur integri numeri 9.8.7.6. id est 30, manebunt 570 pro additis consequentibus. Quintó denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, secundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum sic erit.

	80	$136\frac{261}{357}$
357 dant 570: Ergo	72	$122\frac{342}{357}$ vel $\frac{114}{119}$ per 3
	100	$166\frac{237}{357}$ vel $\frac{79}{119}$ per 3
	105	$173\frac{231}{357}$ vel $\frac{11}{17}$ per 21.

Triplici veró additionis compositioni triplex subductionis divisio potest opponi. Prima est subductio differentiæ antecedentis á consequente: ut 7 ad 3, sic 14 ad 6: ergo ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. Secunda est subductio similis ablati: ut 12 ad 2, sic 18 ad 3. ergo ut 8 ad 2, sic 12 ad 3: itemque ut 4 ad 2, sic 6 ad 3: utrobiq; enim tollitur subsesquialterum. Tertia est subductio differentiæ antecedentis ab antecedente ad differentiã consequentis á consequente: ut 12 ad 9, sic 8 ad 6: ergo ut 12 ad 9, sic 4 ad 3. Postremę divisionis hujus in scholasticis demonstrationibus usus est permagnus & his verbis. Si fuerit ut totus ad totum, sic ablatus ad ablatum, erit ut totus ad totũ, sic reliquus ad reliquũ: usus tamen vulgaris non perinde hic patefactus est. ἀναστροφὴ id est inversio additur, quæ est subductio antecedentis ad suam differentiam supra consequentem: ut 6 ad 4, sic 3 ad 2, ergo ut 6 ad 2, sic 3 ad 1. Hujus divisionis exẽpla in demõstrationibus aliquãdo reperies.

CAP. X. DE ALLIGATIONE.

ALligatio est variorum generum permistio, unde medium temperatur: ut in granis, liquoribus, metallis, pretiis, ponderibus, mensuris, omnibusq; rerũ, quæ quidem misceri, temperarique possint, generibus: In rebus autem physicis mirabiliter excellit hæc species compositionis altera, ut superior excelluit in politicis. Per se vero alligatio nulla est proportio, sæpé tamẽ proportione utitur, & quidẽ sæpé superiore proportiõis additione. Alligatio est medii quæsiti vel dati. Prima datis extremis quærit mediũ divisione additorũ per ipsorũ numerũ: ut si duo sint extrema per 2: si tria per 3: & sic deinceps: ut modius tritici 16 solidorũ cum modio secalis 12 miscẽdus sit, addes 16 & 12, & totum 28 divides per 2, quotus 14 ostendet pretium tertii misti. Hic medium est Arithmeticũ quoties extrema duo sunt. Si miscendus sit cum utroque modius hordei 10 solidorum tria pretia addita 38 dividantur per 3, quotus $12\frac{2}{3}$ ostẽdit pretium quarti misti.

Secũda alligatio est æquatio dati medii per inæqualiũ extremorũ alternas ab

eo differentias: æquatur autem medium datum nunc mensura, nunc pondere, nunc numero quæsitorum generum: ut sie duobus vini generibus, quorum primi pinta valeat denarios 6, secundi 12, miscendum sit, cujus pinta valeat 10: alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 à medio 10, erunt 2 & 4, quæ significabũt, si 2 pintæ sumantur primi generis 4 assumendas secundi: itaque si pintæ 6 miscendæ sint, alligatio sine ulla proportione perfecta erit, ut hîc vides:

	6	2
10		
	12	4

Alligationis hujus causa est é communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, facies 60: item si multiplices 10 per 2 & 4 segmenta senarii multiplicantis, facies 20 & 40 æquales ipsi 60: quia idem est multiplicare per totum & per partes: tùm si per eadem segmenta 2 & 4 multiplices totum 10 alterno segmento, nunc imminutum, nunc auctum, id est per 6 & per 12 facies 12 & 48 eidem 60 æquales, ut hic vides:

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

At 2 pintæ primi vini per 6 pretium multiplicatæ faciunt denarios 12: & 4 pintæ secundi vini per denarios 12 pretium multiplicatæ, faciunt 48. Tum 12 & 48 sunt denarii 60: item 2 pintæ per 10, & 4 pintæ per 10 faciunt denarios 20, & 40, id est 60. Itaque quod pintæ simplices valebant, temperatæ pintæ valent idem. Ideoq; in hac temperatione differentiæ â medio alligantur extremis alternis: suis autem extremis alligatæ facerent plus vel minus, ut hic vides:

	10			10	
8		14	12		6
2		4	2		4
16		56	24		24
	72			84	

Quare per alternas extremorum differentias alligatio facienda est. Neque medius alligationis terminus est proportionis, sicuti neque alligatio ipsa est ulla proportio, sed medius quantitate inter inæquales éxtremos: estq; minor majore extremo, major minore. Nec alligatio ipsa (ut dixi) proportio est, cum sine ea fiat, nec cùm proportione utitur, necessario proportionis additionem adhibet, qualis est in permiscẽdis metallis quotidiana ratio, ut si aurifex habeat 100 pondo argenti, quorum quodlibet valeat 17: item alteram habeat infinitã mas-

sam,

ſam,cujus pondo valeat 24:quantum argenti è ſecunda maſſa addet primæ,ut pondo valeat 22,& quantum omnino futurum eſt. Alligatio alternarum differentiarum ſic erit.

17 2
22
24 5

Unde concludes,2 pondo primi argenti,5 pondo ſecundi requirũt:ergo 100 requirunt 250,quibus adde 100 è prima maſſa,habebis 350 põdo miſti argenti.Sed alligationis quæſtio rara eſt,ſine proportionis additione, ut in exemplo primo. Si unus ſextarius temperandus eſſet ê duobus illis generibus, tum alligatione facta,diceretur non peti 6,ſed 1.Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo. 6 redeunt ad 1:ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$ id eſt $\frac{1}{3}$: 4 redibũt ad $\frac{4}{6}$, id eſt ad $\frac{2}{3}$,totaque quæſtio ſic erit.

6 2. 2 $\frac{1}{3}$
10 6 1
12 4. 4 2

Tale eſt Archimedeum problema illud apud Vitruvium lib.9.ca.3. de aurea regula Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum.Sed in hoc exemplo Phyſica conſideratio fuit,non tantum ponderis, ſed denſitatis & raritatis,ut tanto plus minuſve loci occuparetur. Duas(inquit Vitruvius) maſſas ejuſdem ponderis cum regia corona Archimedes fecit,alteram auream, argenteam alteram,quibus viciſsim in vas aqua plenum demiſsis,ê differentia effuſæ aquæ ad auream maſſam & argenteam,item ad regiam coronam, deprehendit argenti in aurea corona miſtionem. Eſto igitur inæqualis effuſio aquæ ex aurea maſſa 20,ex argentea 36,ex ipſa regis corona 24.Sumptis differentiis vides auri triplum,argenti ſubtriplum in corona permiſtum eſſe. Et ſi corona 16 pondo eſſet,eſſent libræ auri 12,argenti 4,& hæc alligatio eſt ſine proportione. At ſi alterius ponderis ea fuerit,ſimilem rationem proportionis additione concludes: ut ſi fuerit 100 pondo, quæſtionis explicatio tota ſic erit.

20 12. 12 75
24 16 10
36 4. 4 25

Alligationis cauſſa eadem fuerit,ubi termini non tantum tres, ſed quotlibet proponentur: Bini ſiquidem extremi ad unum medium perpetuo conferendi, & differentiæ ad unum extremum alligandæ & per additionem colligendæ. Alligatio autem complurium terminorum multis modis fieri poteſt, ſed primus & promptiſsimus modus binos terminos ſemel alligare,ſi multitudo ſit par mi-

norum parte una & majorum parte altera, secus alligandum erit idem pluribus: ut Monetarius habet genera quatuor argenti, primum est 3 denariorum, secundum 5, tertium 8, quartum 10, quærit quintum genus 6 denariorum. Exemplum totum sic erit.

	3	4
	5	2
6.		
	8	1
	10	3

His si decem pondo misti ac temperati ē, quatuor generibus argenti quærantur, sumentur 4 primi: 2 secūdi: 1 tertii: 3 quarti: sin plura, proportio explicabit. In hoc igitur exemplo par est utrinque multitudo differentiarum: in proximo secus est, unus enim & idem ter alligatur: ut vini genera quatuor sunto, primiq; amphora valeat 7, secundi 9, tertii 10, quarti 12, & miscendæ sint amphoræ 300, quæ singulæ valent 11, dispositis terminis, differētiisq; alterne alligatis tota quæstio sic erit.

	7. 1			1	30
	9. 1				
	10. 1			1	30
11.		10	300	1	30
	12. 4. 2. 1.				
				7	210

In proximo exemplo quia numerus extremorum par est utrinque singuli semel alligabūtur, mercator emerit 400 pondo aromatū sextuplicis generis libellis 200, & quærat quot pondo singulorū generum sit accepturus. Hæc quæstio dissimilis est superioris illius ad quintum caput de æquali numero singulorum generum. Hic enim quæritur quicunq; possit esse singulorum generum numerus, non quæritur æqualis: positis igitur singulorum generum pretiis, primi 6, secundi 7, tertii 9, quarti 11, quinti 12, sexti 16, medium pro arbitrio ubi voles assumetur. Sumatur in medio & sit 10. Alligatio hic erit alternis singulorum semel sic.

	6	6			6	141 $\frac{3}{17}$
	7	2			2	47 $\frac{1}{17}$
	9	1			1	23 $\frac{9}{17}$
10			17	400		
	11	1			1	23 $\frac{9}{17}$
	12	3			3	70 $\frac{10}{17}$
	16	4			4	92 $\frac{2}{17}$

Atqui

Atqui in hoc quæstionis genere si medius quãtitatis terminus nullus sit, non est explicabilis per alligationem, quæstio hujuscemodi.

CAP. II. DE COMPOSITA PROPORtione per multiplicationem solam.

Compositio terminorum prima ejusmodi fuit in additione, & contra deductio quædam in alligatione: secunda sequitur quæ fit terminis multiplicatis, cùm pro binis simplicibus assumuntur duo ab ijs facti: sed multiplicatio interdum sola est, interdum etiam additio, multiplicationis solius exempla prima sunto: ut aurei 3 mensibus 2 lucrantur aureos 6: aurei 4 mensibus 3 quot lucrabuntur? Termini sic erunt.

3	6	4	
$\frac{2}{6}$	6	$\frac{3}{12}$	12

Facti autem nomen accipient ab utrolibet factore, ut hic dies vel aurei 6, lucrãtur aureos 6, vel menses 6 lucrantur aureos 6. verum ubi accidet terminum antecedentis æqualẽ esse termino consequentis, iis sublatis, tres reliqui proportionem eandem concludent, quia facti per eundẽ sunt, ut hic rejectis 3 & 3, concludes nihilominus 2. 6. 4. 12. Item modius tritici 15 solidorum dat panem 8 unciarum, 2 denariis. Ergo modius 20 solidorum dat panem 15 unciarum 5 denariis. Exemplum sic est.

15	2	20
$\frac{8}{102}$	2	$\frac{15}{300}$

Vel sic sublatis terminis æqualibus 8. 2. 20. 5. Sed pluribus exemplis res illustretur, Pondo 100, milliaria 20 vehuntur 36 libellis, ergo pondo 50 millia 12 vehentur l. 10 $\frac{4}{5}$, ulnæ panni lati $\frac{3}{4}$, væneunt 6 libellis, ergo 40 ulnæ lati ulnam 1 $\frac{2}{3}$ væneunt l. 35 $\frac{5}{9}$.

Aulæum longum ulnas 2 & $\frac{1}{2}$, latum 2 emitur 50 libellis, ergo tapetum ejusdem generis alterum longum ulnam 1, latum $\frac{5}{6}$ emetur l. 8. s. 6. d. 8. Boves 10 arãt diebus 7 jugera 35. ergo boves 20 arabunt diebus 24 jugera 240. Huius generis cõpositione sæpe quæstio primæ alligationis explicatur: Sunto 10 modii tritici assium sedenorum, secalis 18 duodenorum, facti á 10 & 16, item ab 18 & 12 sunt 160, 216, & ex iis additis totus erit 376, numeri rerum 10 & 18 sunt 28, tum deniq; proportio concludet. 28 dant 376: ergo 1 dabit 13 $\frac{2}{7}$. Exemplum sic erit.

	10		18
	$\frac{16}{160}$		$\frac{12}{216}$
28.	376.	1	13 $\frac{3}{7}$

Sunto

Sunto eadem genera frumenti modii 54, tritici pretij 16, secalis 30, pretii 12, hordei 23, pretii 10, procedes ut antea. Exemplum sic erit.

	54	16	864
	30	12	360
	23	10	230
107.	1454.	1.	$13 \frac{63}{107}$

Si partes generum miscendæ sint, erit eadem ratio, nisi quod pro iis sumitur ab iis minimus dividuus & partes datis cognomines.

Esto pondo caryophili 36 assium, cinnami 15, piperis 13, & velis miscere primi generis $\frac{1}{2}$, secũdi $\frac{1}{3}$, tertii $\frac{1}{4}$. Minimus dividuus ab iis partibus est 12, & partes cognomines sunt 6.4.3. totumque exemplum sic erit.

	6	36	216
	4	15	60
	3	13	39
13	315	1	$24 \frac{3}{13}$

Proportio hæc interdũ invertitur multiplicatis inter se primo & quinto, item secundo & quarto ad factionem primi & tertii: ut 2 messores demetunt 6 jugera 4 diebus: 8 messores 12 jugera quot diebus demetẽt? reperies 2, exemplũ sic erit.

2	4	8
6		12
24		48
4		2

Sic reciprocatio manifesta est ut primus: vel inversio sic.

2 24 4 48.

CAP. XII. DE PROPORTIONE COMposita per multiplicationem & additionem.

Compositio multiplicationis simul & additionis, est quæ oblatos terminos primo multiplicat, tum ab illis factos addit, ut, Trium mercatorum primus contulit aureos 44 per 8 menses, secundus 32 per 6 menses, tertius 24 per 4 menses, unde lucrati sunt aureos 80; quantum singulis ex hoc lucro cedet? Multiplica sortem quamque cum suo tempore, primi compositus erit 352, secundi 192, tertii 96, & singulis jam additis dicito.

640 dant

	352	44
640 dant 80. ergo	192	24
	96	12

Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis stipẽdium est 4 aurei, equitis 9, præda aureorum 200 his dividenda, quantum singulis dabitur? multiplica numeros personarum & stipendiorum, primus factus erit 24400, secundus 6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic:

30934 dant 2000: ergo 24400 — $1577\frac{17082}{30934}$ vel $\frac{8541}{15467}$
6534 — $422\frac{13852}{30934}$ vel $\frac{6926}{15467}$

Canonici 12 & sacellani 20 partiuntur quotannis aureos 3000, sed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties sacellanus 4, quantum igitur eorum stipendium est annuum? multiplica numeros personarum & stipẽdiorum, primus erit 60, secundus 80, qui additi sunt 140: dic igitur.

140 dant 3000: ergo 60 — $1285\frac{5}{7}$
80 — $1714\frac{2}{7}$

Interdum faciendi complures é variis generibus sortium & temporum, in unum tandem omnes addendi, ut Quatuor mercatorum biennii societate inita, primus 30 aureos contulit, sed octavo post mense 10 subduxit, iterumque vicesimo mense ineunte 12 contulit: secundus initio 24 contulit, ac sexto post exacto mense subduxit 8, denuoque sextidecimi mensis initio 14 retulit: tertius initio contulit 20, & septimo post exacto mense 8 omnes subduxit, sed decimo septimo post exacto mense 16 retulit. Quartus septimo mense ineunte 18 aureos contulit, sed quarto post exacto mense 9 subduxit, iterumque decimo septimo mense incipiẽte 15 addit: lucrum ex omnibus his summis factum est 100 aureorum. Quæritur lucrum singulorũ. Hic quæstio laboris multo plus habet, quám quæstionis explicatio: itaq; totam & quæstionem, & quæstionis explicationem subtiliter adscripsi, ut hic vides.

30	8	240	
20	11	220	620
32	5	160	
24	6	144	
16	9	144	558
30	9	270	
20	7	140	
0	10		252
16	7	112	
0	6	0	

18	4	72	318
9	6	54	
24	8	192	

Hic ſortes & tempora in ſuum compoſitum habes reducta. Nam primi 30 aurei & 8 menſes faciunt 240: Deinde reliqui 20 aurei & 11 menſes faciunt 220. Poſtea 20 aurei & 12, id eſt 32 & menſes 5 faciunt 160. Denicꝫ facti tres additi ſunt 620. Secundi mercatoris 24 aurei & 6 menſes faciunt 144. Deinde reliqui 6 & 9 menſes faciunt 144, tum aurei 14 & 15 id eſt 30, cum 9 menſibus faciũt 270. Hi tres facti additi ſunt 558. Tertii 20 aurei & 7 menſes faciunt 140: Deinde 15 aurei & menſes 7 faciunt 112, hic factus additus priori, conſtituit 252. Quarti 18 aurei & 4 menſes faciunt 72, tum 9 aurei & menſes 6 faciunt 54. Denique 9 & 15, id eſt 24 aurei & 8 menſes faciunt 192, quatuor facti additi ſunt 318. Colligamus tãdem hos quatuor compoſitos, & cõcludamus principem proportionẽ.

	620	$35\frac{205}{437}$
1748 dant 100. ergo	558	$31\frac{403}{437}$
	252	$14\frac{182}{437}$
	318	$18\frac{84}{437}$

In hanc etiam ſpeciem incident alligationes ignoti medii, quoties major expetetur numerus, ut in illo frumentorum exemplo ſi pro 13 expeterentur 100. exemplum ſic eſſet.

		6	$46\frac{2}{15}$
13.	100		
		4	$30\frac{10}{13}$
		3	$23\frac{1}{13}$

CAP. XIII. DE PROPORTIONE TERMINIS CONtinuata ad inveniendum minimos terminos in datis rationibus.

PRoportio multiplex terminis compoſita adhuc fuit, ſupereſt terminis continuata. Proportio terminis cõtinuata eſt quãdo antecedẽtis rationis aliquis terminus continuatur in conſequente: ut inventio minimorum numerorum in datis rationibus & æquatio. Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad ſecũdum & tertium minimi multiplicent obliquè terminos duarum primarum rationum, facti erunt continuè minimi in datis rationibus: Deinde ſi proportionales ad poſtremo inventum & antecedentem conſequentis rationis minimi multiplicent obliquè, alter inventos, alter ſequẽtes omnes, facti erunt continuè minimi in datis rationibus, ut hic vides.

5	6	4	3
10		12	9

Nam ſi ſumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum ſi multiplices obliquè 6 & 5 per 2, facies 12 & 10. Item ſi per 3 multiplices obliquè 4 & 3 facies 12 & 9

continuè minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3 sic 12 ad 9. Hic aũt continuatio terminorũ est in datis rationibus, ut regula præcipit: non aũt continuatio rationum, & hæc proportio disjuncta est rationibus continua tantum terminis minimis in datis rationibus. Esto & aliud exemplũ.

2 3| 4 5| 6 7
8 12 15
16 24 30 35

In hoc exemplo proportionales ad 15 postremo inventum, & 6 antecedentem sequẽtis rationis minimi sunt 5 & 2, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16.24.30.35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum: habet veró & hæc continuatio usum valde singularem ad illam politicam justitiæ ideam, de qua in additionis compositione diximus: Atque ut res ipsa clarior fiat & illustrior, audiatur justitiæ consultus & magister ille de liberis & posthumis hæredibus instituendis. Julianus enim generis hujus quæstionem proponit Digest. lib. 28. Si ita scriptum sit (ait) si mihi filius natus fuerit, ex besse hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto. Si veró filia mihi nata fuerit, ex triente hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto: & si filius & filia nati essent, dicendum est assem distribuendũ esse in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor 2, filia 1 partem habeat. Ita enim secundum voluntatem testantis filius altero tanto amplius habebit quàm filia. Licet enim subtili juris regulę conveniat ruptum fieri testamentum: attamen cùm & utroque nato testator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad ejusmodi sententiam humanitate suggerente decursum est, quod etiam Iuventio Celso apertissime placuit: Hæc jureconsultus de uno & singulari theorematis hujus exemplo. at præstat theorema ipsum ut generale est, ita generaliter institui. Hic igitur intelligimus ex volũtate testatoris tres numeros inveniẽdos esse continuè minimos in datis rationibus $\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}$ id est in rationibus 2.1|2.1. qui erunt 4.2.1. Ac si hæreditas fuerit 70 coronatorũ ex additis illis terminis quæstio hercisc̃udæ familiæ ita solvetur.

4 40
7 dant 70: ergo 2 20
1 10

In hoc exemplo accidit rationes continuari: at si uoor duos filios & totidem filias pepererit neque septenarjus Iuliani sufficeret neque rationes continuabũtur, sed tres quaternarii pro tribus filiis, binarius unus pro matre, duæ unitates pro duabus filiabus assumendæ: adde igitur omnes & conclude.

4 $17\frac{1}{2}$
4 $17\frac{1}{2}$
16 dant 70: Ergo 4 $17\frac{1}{2}$
2 $8\frac{3}{4}$
1 $4\frac{3}{8}$
1 $4\frac{3}{8}$

Similia ſunt illa. Partiatur pater tribus filijs 100 aureos ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties ſecundus 6 capiat, & quoties ſecundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos ſinguli capient? Hic duæ ſunt rationes in minimis terminis 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui ſunt 35.42.54. hoc modo.

5 6 | 7 9 |
35 42 54

Adde igitur tres continuos repertos, totus erit 131. & jam dicito,

131 dant 100: ergo
35 $62\frac{94}{131}$
42 $32\frac{8}{131}$
54 $41\frac{29}{131}$

Augeatur veró numerus hæredum, & quatuor hæredibus 100 ita dividatur, ut quoties primus capit 3, ſecundus capiat 4, & quoties ſecundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei ſingulis cedent? hic ſunt tres rationes in minimis terminis diſsimiles: 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini ſunt 105.140.158.192. adde continuos, totus erit 605: & dicito

505 dant 100: ergo
105 $17\frac{45}{121}$
140 $23\frac{17}{121}$
168 $27\frac{93}{121}$
192 $31\frac{89}{121}$

CAP. 14. DE AEQVATIONE.

Eiuſmodi igitur eſt inventio minimorum in datis rationibus: ſupereſt æquatio, id eſt continuatio duorum ordinũ binis numẽris ꝑroportionalium: Itaque extremi remotis mediis ſunt proportionales, neque continuatio rationum hic expetitur, ſed terminorum tantummodo: æquatio eſt ordinata vel perturbata: æquatio ordinata eſt æquatio ſecundum eundem ordinem numerorum. Itaque primi ſecundis, ſecundi tertiis ſunt proportionales: ut hic vides in tribus exemplis, quæ continuari in unum poſſunt.

9. 6. 3. | 9. 6. 9. | 3. 6. 9.
12. 8. 4. | 12. 8. 12 | 4. 8. 12.

Hoc genere proportionis plurimæ in elementis demonſtrationes â Theone concluſæ ſunt: potes autẽ in exemplo continuare æquationem proportionibus octo: dicique ſeptem intermiſsis proportionibus, ut 9 ad 9, ſic 12 ad 12. æquatio turbata eſt quando fuerit ut primi ordinis primus ad ſecundum, ſic ſecundi ſecundus ad tertium: utque primi ſecundus ad tertium, ſic ſecundi primus ad ſecundum: ut vides in tribus exemplis ſeparatis non continuis.

9. 8. 6. | 9. 8. 9. | 32. 16. 8
24. 18. 16. | 16. 18. 16 | 8. 4. 2

Hic enim

Hic enim ut 9 ad 8, sic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, sic 24 ad 18, & similiter inverso ordine in reliquis exemplis. Difficile autem sit in numeris integris terminos proportionis inversé æquatos continuare: continuari tamen possunt ordine non solum inverso, sed in contrarias partes tendente: ut hic vides

6. 3. 2. 1. 3. 4. 3. 1. 2.
12. 24. 8. 6. 8. 24. 12. 8. 4.

Hoc proportionis genus minus usitatum est, ea tamen Archimedes utitur 4 theoremate 2. de Sphæra, & 9. Theor. 2. Isorro.

CAP. XV. DE CONTINUAE *proportionis propriet.te.*

PRoportio disjuncta generatim descripta est, jam tēpus est de continua dicendi, quandó quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium: ut in 2. 4. 8. De proportione continua & simplici in tribus terminis vel multiplici, in longius continuis similia ferê præcipiuntur ijs quæ præcepta sunt in proportione disjuncta. Proprietas primó duplex deducitur é duplici proprietate disjunctæ proportionis. Si tres numeri sunt cōtinuê proportionales, maximus & minimus majores sunt medio: ut in 2. 4. 8. 10 superant 4: neque tamē cōvertitur magis quám antea. Secunda autem proprietas est reciproca. Nam 16 factus á 4 medio est æqualis ipsi 16 facto á 2 & 8 extremis, & vicissim, cum ęqualitas ista sit, tres numeri sunt proportionales. Hic enim medius est pro duobus. Itaque quod aurea regula docuit de quatuor disjunctis, id nunc continua proportio assumit in tribus cōtinuis. Hinc etiam patet inventio proportionalis sive medij sive extremi. Nā si factum á duobus tertius per se diviserit, erit medius proportionalis, ut 4 per 4 dividit 16 factum á 2 & 8, & medius est proportionalis inter 2 & 8. Item, Si primus diviserit factum á secundo, quotus erit illis tertius proportionalis, ut in eodem exemplo datis 2 & 4, primus 2 dividat 16 factum á 4 secundo, quotus 8 erit tertius illis continué proportionalis. Itaq; regula hic aurea etiam est, sed in tribus numeris, quæ ante fuerat in quatuor, hinc varia sequuntur: primó. Si duo numeri habeant tertium proportionalem, erunt compositi inter se, ut in eodem exemplo 2 & 4. Ideoq; si primi sint inter se, nō habebūt proportionalem tertium: ut in 2. 3. Nam si 9 factum á 3 dividas per 2, quotus erit $4\frac{1}{2}$, qui numerus non est integer.

CAP. XVI. DE INVENTIONE *continué proportionalium.*

HAEc proprietas est proportionis continuæ & simplicis ad inventionem tertij proportionalis. Sed proportio continua quotlibet terminis continuari

potest, tumque ratio primi ad secũdum duplicatur in tertio, triplicatur in quarto, & sic deinceps uno minus: ut in 1. 2. 4 ratio 1 ad 4 est ratio 1 ad 2 duplicata in 1. 2. 4. 8. ratio 1 ad 8 est ratio 1 ad 2 triplicata, ratio nempe extremorum colligitur ex omnibus intermediis, ut antea patuit. In hac progresione plurima spectari possunt ut si primus dividat secundum dividet consequentes omnes, si dividat ultimum dividet secundum, sed præcipuè spectatur inventio terminorum vel summa. Invẽtio terminorum multiplorũ facilis est multiplicando ultimum per nomen rationis, non item in reliquis generibus: theorema tamen inventionis hujus commune est, è datis duobus cujuscunque rationis sic est. Si duo datæ rationis numeri multiplicentur uterq; per utrumque, fient tres continuè proportionales datis: tum si facti multiplicentur per datum antecedentem, denuoque ultimus per datum consequentem, quatuor fient continuè proportionales datis, & sic deinceps inveniẽtur quotlibet in data ratione, ut hic vides.

2 3

4 6 9

8 12 18 27

16 24 36 54 81

Hoc exemplum fuit rationis superparticularis, via eadem erit in reliquis generibus. Hinc etiam sequitur inventio minimorum, si nempe dati sint minimi. Extremi enim erunt primi, quia facti à primis inter se, vel à primis per primos. at si continuè proportionales sint, extremorum inter se primorum erunt minimi, & contrà, ut in eodem exemplo patet. Itaque si continuatio sit extremorum inter se, primorum erit maxima. Ex hac inventione duplex inventio alia sequitur, prima. Si duo numeri habuerint continuè medios, proportionales datis habebũt: medios totidem, ut in eodem exemplo. Secunda. Quot continnè medios habẽt primi inter se, totidem habeant ad unitatem. Et quot medios habent duo numeri, & unitas, dati totidem habent: ut in eodem exemplo si proponatur unitas, ut hic vides.

1

2 3

4 6 9

8 12 18 27

16 24 36 54 81.

Ex hoc autem consectario secundò sequitur inventio cujuscunq; optati termini è multiplicibus. Si termini progresionis arithmeticæ ab unitate, terminis geometricæ progresionis à datæ rationis primò multitudinis numero respondeant, factus á duobus geometricis, erit progresionis suæ terminus uno major quám est simul uterq; arithmeticorum multiplicatis respondentium, ut in hac progresione dupla.

1. 2. 3. 4. 5. 6.

1 2 4 8 16 32 64

Itaque

Itaq; si quæras terminum progressionis octavum, adde arithmeticos terminos constituentes septimum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos ijs respondentes 8 & 16. facies 128 octavum terminum progressionis. Sic erit in hac progressione tripla.

	1	2	3	4	5
1	3	9	27	81	243

Si quæras decimum, multiplica 243 per 81 respondentes arithmeticis 4 & 5, constituentibus nonum, facies 19683 decimum terminum. Hęc termini optati est inventio. Observata veró est hæc inventio in hac multiplici continuatione ex arithmetica locorum progressione, ut regula instituit, quia primus multitudinis numerus multiplicans secundum facit tertium, hoc in primo loco singulare jus est, secundus multiplicans tertium facit non jam quartum, sed uno plus id est quintum, tertius multiplicans quartum facit, non quintum, sed plus duobus, id est septimum, & sic deinceps. Caussa veró est tam disparis accretionis proportionalium proprietas, quia quot inter unitatem & secundum é duobus multiplicatis, intercedunt continué medii, tot inter secundum é multiplicatis & optatum intercedunt. Omnis enim progressio multiplicium est ab unitate, quia numerus multitudinis quilibet est multiplex ad unitatem. Ideoque inventio optati est in solis multiplicibus, quorum nempe primus terminus possit esse unitas: in reliquis rationum generibus non est, in quibus neque unitas potest esse primus terminus, neque ideo progressio potest infinité ab unitate perpetuari.

CAP. XVII. DE INVENIENDA *summa progreßionis geometricæ.*

Atque hæc de inventione continuorum, summa sequitur: Si tollatur primus á secundo & ultimo, erit ut reliquus secundi ad primum, sic reliquus ultimi ad ultimum pręcedentes omnes. Ideoque, si quartus (qui sic erit ad reliquum ultimi, ut reliquus secundi ad primum) addatur ultimo totus, erit summa, ut hic vides.

2	4	8
	2	6.

Tollatur 2 á 4 & ab 8, ut 2 reliquus secundi est ad primum 2, sic 6 reliquus ultimi est ad 4 & 2 præcedentes: utrobique enim est æqualitas. Proportionales sunt igitur 2.2.6.6. jam 6 addatur 8 ultimo, summa progressionis erit 14. Sic in

2	8	32
	6	30

Tollatur

Tollatur 2 ab 8 & 32, manent 6 & 30, utque 6 est ad 2, sic 30 est ad præcedentes, ideoque triplus: proportionales igitur erunt 6. 2. 30. 10. Iam denique 10 addatur 32, totus 42 erit summa progreſsionis. Fac periculum in majore progreſsione, ut hic uides.

2	4	8	16	32	64
	2				62

Tollatur 2 à 4 & 64. manent 2 & 62: utque 2 est ad 2, sic 62 ad præcedentes, ideoque æqualis est illis, proportionalesque ita sunt 2. 2. 62. 62. Quapropter 62 addantur 64, totus 126 erit progreſsionis summa.

Agricola promisit filio suo pro xenijs primo anni die in triginta continuos dies modios tritici primo 1, secundo 2, tertio 4, & sic deinceps duplicando: quæritur tricesimo die quot modii futuri sint. Quæratur tricesimus terminus, id est ultimus progreſsionis hujus, ut antea demonstratum est: primo sextus 64 per sese faciet 4096 pro duodecimo termino: ut hic rursus ex sese faciet 16777216 pro vicesimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminum, facies pro vicesimo nono termino 536870912, qui tricesimus erit, si unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas à secundo & ultimo, exuperantia secundi erit æqualis primo. Itaque inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnib. antecedentibus. Addatur uterque, summa tota erit 1073741823. Regula plura põderandi paucis ponderibus deducitur è geometrica progreſsione, quæ libripẽdi singularem commoditatem suppeditat: ideoque ad extremum addenda visa est, ut in proximo exemplo.

Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehensę, totidem cognominibus ponderibus appenduntur. Id veró fit nunc additione ponderis ad põdus, nunc subductione & ad oppositam lancem additione. Sic libræ usque ad 7 appenduntur tribus ponderibus, quorum primum unius libræ, secundum binarium, id est duarum librarum, tertium quaternarium, quia progreſsionis 1. 2. 4. termini tantum comprehendunt: sic libræ usque ad 15 appenduntur 4 ponderibus hac progreſsione significatis 1. 2. 4. 8. Sic libræ 31 ponderibus hujus cõtinuationis 1. 2. 4. 8. 16. Sic in tripla ratione, libræ usque ad 40, appenduntur ponderibus hac progreſsione significatis 1. 3. 9. 27. Sic libræ usque ad 121 appenduntur his ponderibus 1. 3. 9. 27. 81. & sic deinceps libræ terminis triplæ progreſsionis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appendentur.

FINIS.

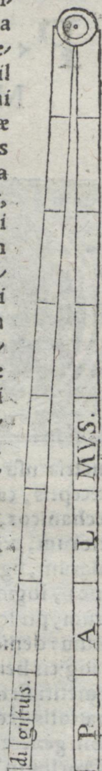
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. I. DE MAGNITVDINE.



Eometria est ars bene metiendi.

Finis geometriæ est bene metiri, ideoque suo fine definitur: Bene metiri igitur est cujusque rei mensurabilis naturam atque affectionem considerare, resq; mensurabiles comparare inter se, rationemq; & proportionẽ atque similitudinem perspicere: id enim totum est bene metiri, sive cõgruentia & applicatione datæ mensuræ, sive multiplicatione terminorum, sive facti per multiplicationem partitione, sive quacunq; alia ratione rei mẽsurabilis affectio consideretur. Atque hic finis geometriæ usu atque opere geometrico multò splendidior apparebit, quàm præceptis, cum animadvertes astronomos, geographos, geodetas, nautas, mechanicos, architectos, pictores, statuarios in descriptione & dimensione astrorum, regionum, fundorum, machinarum, æquorum, ædificiorum, tabularum, signorum nihil aliud quàm geometria uti: sicuti grammatica, rhetorica, logica plenius & abundantius percipiuntur ex usu poetarum, oratorum, philosophorum, quam è dictatis grammaticorum, rhetorum, logicorum: denique ut in grammaticis rebus bene loqui, in rhetoricis bene dicere, in logicis bene ratiocinari, in arithmeticis bene numerare, sic in geometricis bene metiri sit finis summus atque ultimus: quo referantur & pertineant omnia, quæ totis geometricis elementis instituantur. Mensura verò in quolibet mensurabili genere est quippiam minimum, ut Aristoteles annuit 4 cap. 2 de cælo, & Proclus in Timæum repetit, & vulgo à geometris famosa mensura dicitur, ut in metiendis palmis, pedibus, passibus, unus palmus, unus pes, unus passus. Sed enim Protagoræ antiquũ dictũ est, in Aristotelis philosophia hominẽ esse τὸ τῶν ἁπάντων χρημάτων μέτρον omnium rerum mensuram, quod etsi alio quodam sensu usurpatur à Protagora, attamen libenter audio hominẽ natura geometricum esse: & Vitruvius Heroque mechanicus docent mensuras rerum ex humanis membris acceptas esse, digito, palmo, pede, cubito. Digitus est 4 granorum hordeaceorum, ut granum hordei minima mensura sit, palmus 4 digitorum, pes quatuor palmorum, ut sequitur.

Cubitus à radice ad extremum longissimum digitum est sesquipes. Ex iis mensuris oritur itineris mensura passus, stadium millia riũ. Passus geometricus est 5 pedum, stadium 125 passuum: & Græcorum est: milliarium mille passuum, & est Latinorum: ideoq; mille & millia pro milliario & milliariis sumuntur. Franci & Hispani Leucam 2000 passuum nominant. de cæteris generibus mensuræ plura in scholis. Quare geometria hunc in modum definita sit ars bene metiendi. Nomen autem re nominata levius ést. Geometria enim dicitur tanquam terræ tantum dimetiendæ ars quædam sit, quod nomẽ videtur in Aegypto primum factum esse: ubi ad terminos agrorum Nili inundationibus obrutos restituẽdum primum geometria adhibita sit. Itaque authori Epinomidis geometriæ ὄνομα γελοῖον nomen ridiculũ dicitur, quod nempe à terra mundani globi centro factũ sit, cum geometria sit ars metiendi non solum terram, sed aquam, sed aerem, totumque mundum, in eoque corpora, superficies, lineas, omniaque omnino mensurabilia: Neque vero Plato cum dixit τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν, deum semper tanquam dicere, terrimetiri, intellexit terras tantum metientem deum, sed ratione, proportione, similitudine omnes mundi partes exornãtem & dimetientem: ut Plutarchus octavo Symposiacon secundo problemate interpretatur. Quare geometriæ nomen origine nimis angustum est: usu tamen tandem est ampliatum latius, adeo ut cõfuse & arithmeticam de numero, & metricam ipsam de magnitudine vulgo complectatur: & sic Quintilianus ait lib. 1. cap. 10. geometriam dividi in numeros atque formas, & Euclides, quamvis in totis elementis verbum ipsum (geometria) nusquam legatur, attamẽ re ipsa si elementa hoc nomine complecti voluit, & si titulus elemẽtorũ nominis hujus fuit, arithmeticam etiam & metricam geometriæ nomine cõplexus est. Et academiæ epigramma, οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, non solum geometriæ, sed totam mathematũ ignorantiam aversabatur. Itaque geometriæ nomen tandem latius ampliatum est. Platoni in Philebo & politico, & 7. de repub. μετρικὴ significantiore verbo & magis proprio dicitur hæc ipsa ars: sed quoniã nominum magister est usus, geometriæ nomẽ teneatur modo sua vi & facultate propria definitum. Singula autem elemẽta deinceps numero distinguentur, & postea per e literam elementum significabitur.



2. *Res ad bene metiendum proposita est magnitudo.*

Subjectũ geometriæ est magnitudo. Est enim singulis artibus certũ & propriũ quoddã propositũ genus ad interpretãdũ & suis præceptis informãdũ, eoque præcipue inter se differunt, præcipueque sunt cõtinendæ. Idenim logica lex καθ' αὑτὸ imprimis præscribit. Sic grammaticæ sermo, rhetoricę oratio, logicæ ratio, arithmeticæ numerus, ita nunc geometriæ magnitudo declaranda, & omnibus

omnibus generibus, differentiis, affectionibus explicanda proponitur.

3. *Magnitudo est quantitas continua.*

Hæc definitio est ex Aristotelis categoriis: numerus est quantitas discreta, ut binarius, ternarius, quaternarius, constant ex unitatibus, duabus, tribus, quatuor: hæ partes sunt discretæ & separatæ: at lineæ, superficiei, corporis partes absque ulla secretione continentur, ut mox plenius intelligetur. Itaque magnitudo est, qua mensurabile quodlibet magnum dicitur: ut linea longum, superficie latum, corpore solidum.

4. *Continuum est, cujus partes communi termino continentur.*

Hæc item è categoriis Aristotelis definitio est, sensus reconditioris planeque geometrici: & præcipue dependet è communi termino: partes vero (quæ dicũtur) hic nihil in toto sunt, nisi potentia: ut vere Aristoteles admonet 1. cap. 6. Phys. Neque tota magnitudo cogitari posset, nisi partibus suis compacta, quas tamen licet omnibus locis assumere contentas communi termino, qui Aristoteli est κοινὸς ὅρος, Euclidi κοινὴ τομὴ communis sectio, ut in linea punctum, in superficie linea, in corpore superficies.

5. *Terminus est magnitudinis extremum.*

Terminus hic appellatur sive actu terminet, ut in magnitudinis principio & fine, sive potentia, ut cum est communis terminus continui, neque terminus est pars terminatæ magnitudinis: aliud enim est terminans, aliud terminatum. Terminus enim uno intervallo inferior est terminato: punctum lineę terminus est, & minor est uno intervallo, quia est individuum: linea est terminus superficiei, & minor item intervallo, quia sola est longitudo: superficies est terminus corporis, & minor item intervallo, quia est longitudo tantum & latitudo. Et sic Aristoteli in categoriis terminus lineæ, superficiei, corporis accipitur punctum, linea, superficies. Terminata verò & finita omnis magnitudo est actu, geometraque (ait Aristoteles 6. cap. 3. Phys.) infinitã lineam non aliter postulat, quam quanta satis sit, & sic ait idem 10. cap. 1. de cælo, διαγράμματα postulantur disciplinæ caussa.

Itaque

Magnitudo infinite & creatur, & continetur, & secatur iisdem quibus terminatur.

Linea, superficies, corpus creantur motu puncti, lineæ, superficiei: item continentur & secantur puncto, linea, superficie: at linea puncto, superficies linea, corpus superficie terminatur: ut per singula genera percipietur. De sectiõe Proclus generatim etiam monuit antè 1 p 1. Quod omnia dividuntur iisdem, quib. terminantur: quod & continui definitione intelligitur. Nam si commune vinculum ad continendum & copulandum partes lineæ, superficiei, corporis est punctum, linea, superficies, necesse est sectionem cõmunibus illis vinculis fieri, & dissolvi, quod cõtinebat & copulabat. Infinita vero magnitudinis sectio plurimis in Euclide locis de quibus in scholis postulatur: unde & geometrica ἀφαί-

ρεσις & abſtractio perſpicue agnoſcitur. Magnitudo enim in geometricis rebus, non phyſica, ſed abſtracta á phyſico corpore animo concipitur. ἀφαίρεσις tamē communis omnium artium non geometriæ propria eſt: abſtractiva enim perinde eſt (ut Ariſtoteles author eſt 3 cap. 13 lib. philoſophiæ) aſtrologia, harmonica, Optica, Phyſica, Medicina, & omnino quælibet diſciplina: quæ generalia tantum documenta interpretatur, é logica nempe lege κατὰ παντός. Et quidē calor & rubor, qui maximé ſentiuntur, ſi propria doctrina doceantur, ſeparati á cæteris qualitatibus & abſtracti, imó á cæteris heterogeneis rebus cogitentur neceſſé eſt, ſolaque mente percipiantur, nec tamen talis in rerum natura calor, neque talis color ſeparatus & abſtractus ullus eſt. Attamen quamvis magnitudines, corpora, ſuperficies, lineæ, puncta mente ſic abſtrahantur á qualitatibus phyſicis & ſenſilibus â lucido, umbroſo, raro, denſo, levi, graui, calido, frigido, humido, ſicco, revera tamen eſſe in iis ipſis phyſicis corporibus Ariſtoteles ſæpé & ſolicite confirmat, ut in phyſicis 1. cap. lib. 2: 5 & 8 cap 3. lib. de cælo: in methephyſicis præcipué 3 cap. 13 lib. ubi nominatim ait rationes & demonſtrationes eſſé de magnitudinibus ſenſilibus: non tamen quatenus ſunt ſenſiles, ſed prout tales ſunt. Et ſicut Vitellio ad 3 p 2. veriſsime ait. Omnis linea, qua pervenit lux à corpore luminoſo ad corpus oppōſitum, eſt linea naturalis ſenſilis, latitudinem quandam habens, in qua eſt linea mathematica per ſpeciem imaginationis aſſumēda. Denique magnitudinis geometricæ intelligencia eſt mentis, magnitudo tamen ipſa, linea, ſuperficies, corpus eſt revera in ſenſili & phyſico corpore. Hæc logica de mathematis Ariſtotelea eſt. Quare magnitudines licet mēte ſeparēt, revera tamē ſunt illę ipſę magnitudines, quib. corpora phyſica corpora ſunt, id eſt longa, lata, ſolida, atque omnino locum occupantia. Quare geometricé & phiſicé judicavit Ariſtot. cū docuit magnitudines revera phyſicas eſſe, ſed abſtractas à cæteris phyſicis qualitatibus à geometris mente conſiderari: & contrá geometricas magnitudines phyſicis qualitatibus permiſtas â phyſicis ſenſu in corpore ſenſili tractari. Sic Ariſtoteles 2 cap 2. phyſ. Lineam geometricam ab Optica diſtinguit. Geometria (inquit) conſiderat lineam phyſicam, at non quatenus phyſica eſt: Optica autem conſiderat lineam geometricam quidem, non autem quatenus geometrica eſt: ſed quatenus phyſica. Sic igitur Ariſtoteles de abſtractione mathematum philoſophatur. Neque verò in hac logica abſtractione (quæ conſtituendæ doctrinæ cauſſa inſtituitur) geometra mentitur, ſed craſsis ſymbolis, & notis, & exemplis punctorum, linearum, ſuperficierū, corporū abutitur ad res notis illis ſignificatas explicādū: ꝙ Ariſtoles monuit in prioribus 1 lib 39 cap. & in poſterioribus 1 lib 8 cap. & in phyſicis 2 cap 2. lib. & in philoſophia 3 cap 13 lib. & 2 c 14 l. Deniq; tota ἀφαίρεσις geometrica eſt logica, quæ cōſiderat genera generaliter, & ſola mēte cōcipit, generū tamen eſſentiā & veritatē docet in ſingularibus conſiſtere. & ſi quid omnino logicis legibus contrariū geometria profiteretur, id ἄλογον planeque abſurdum judicarem. Quare cū magnitudo geometrica ſit in infinitum dividua, ἀφαίρεσις neque phyſicas magnitudines tollit, neque interea quidquam mentitur.

6. *Punctum eſt ſignum in magnitudine individuum.*

Euclides 1.d.1. id ipsum comprehendit, cum ait, signum esse cujus nulla pars sit. Neque tamen absolute σημεῖον signum (ut Euclides) appellamus, sed punctum dicimus, quia Platoni & Aristoteli στιγμὴ punctum est pro eodem hic proprium. Punctum verò ut definitur, physicum & sensu perceptibile nullum est, quia sensus tantum corpus sentit & si quid sensu minimum sit, punctum physicum dicitur. Quare punctum quidem nulla est magnitudo, neque id ipsum est, quod creta pingitur, pictumque oculis cernitur, sed quod in magnitudine individuum cōcipitur & cogitatur. Ac quamvis sit magnitudinis expers, magnitudinis tamen omnis est principium & principium potentiâ: fluxu siquidem motuque puncti linea deinde exoritur, ex qua superficies, unde corpus. Itaque Aristot. 14 cap 1. Top. punctū ait esse idē in linea, quod unitas est in numero: utrumque enim principium: unitatē enim principium numeri ajunt esse & pūctum lineæ. Proinde & Pythagoreis (ut est apud Proclum) punctum definitur unitas habens situm.

7. *Magnitudines symmetræ sunt, quas eadem mensura metitur, asymmetre contrá* 1.2 *d.* 10.

Magnitudinum inter se est á numeris symmetria & ratio: á seipsis autem congruentia & adscriptio, sed mensura magnitudinis tantum est θέσει, & arbitrio geometræ statuētis digitū, palmū, pedē, aut aliud quodlibet pro mēsura. Ergo duæ magnitudines, altera pedalis, altera bipedalis sunt symmetræ, quia magnitudo pedis unius utramq; metitur, primam semel, secundam bis. At quædam magnitudines mensuram communem non habent, ut diagonius quadrati & latus ad 116 p 10. actu asymmetra sunt, quæ Aristoteli propositio est in ore perpetua. Diagonius tamē & latus potentia symmetra sunt, per sua nempe quadrata, quia quadratum diagonii duplum est ad quadratum lateris.

8. *Rationales sunt quarum ratio est explicabilis numero datæ mensuræ, irrationales contrá.* e 5 *d* 10.

Data mensura Euclidi dicitur ῥητὴ id est dicta, definita, certa, quæ nempe numero expressa sit, famosa nempe quæ prius dicta est, velut signum propositum confessumque (ut ait author de lineis individuis) á qua mensura capitur (ut ait Theon ad 11 p 10.) Atqui hæc mensura rationalis est sibi ipsi, ut sunt omnes magnitudines inter se æquales: Ideoq; vulgó rationalis dicitur, sed ratione obscuriore, cum reipsa terminus rationis unicus appareat: manifestiore autem ratione magnitudines rationales dicuntur, quæ symmetræ sunt ad datam mēsuram, sicut ait idē author de lineis individuis, lineas rationales vel irrationales πρὸς ἀλλήλας inter se dici: quod nusquam tamen Euclides satis aperte proposuit. Sic Marinus in protheoria datorum ait ῥητὸν esse, quod secundúm aliquem numerum cognoscimus, & secundúm aliquam positione mensuram, ut secundúm palmum verbi gratia vel digitum: sic apud Pachymerium definitur ῥητὴ per numerum nota. Sic in musicis Ptolemæus definit rationale, cujus mensura accuratius nota sit. Irrationales igitur magnitudines cōtrá intelligantur, ut latus la-

teris quadrati 20 pedum ad datam bipedalem, qualium irrationalium magni tudinum genera tredecim libro decimo elementorum docentur: sic ad nostram hanc definitionem quamvis ad Euclide nequaquam satis expositam ad 6. 11. 16. 17 p 13. segmenta rectæ proportionaliter sectæ sunt irrationalia ad totam rationalem: diameter in circulo rationalis est, irrationalis ad latus inscripti quinquanguli: diagonius icosaedri & dodecaedri est irrationalis ad latus. Atque horum omnium ratio quidem est, ut ratio duarum quarumlibet quantitatum, sed cū sit inexplicabilis numero, satis fuerit generali notitia irrationales nosse: qua specie aut differentia ἀλογίας, ad finem geometriæ nihil attinet.

9. *Magnitudines congruæ sunt, quarum partes applicatæ partibus æqualem locum occupant.*

Symmetria igitur & ratio à numeris fuerunt, proximæ magnitudinum affectiones geometricæ omnino sunt: in congruentia verò latus logice & situs intelligatur, qui sit corporis, superficiei, lineæ: imo vero etiam puncti. Et sic Euclides in Datis ait dari situ, quæ semper eundem locum obtinent: & nominatim sic puncta, sic lineas, sic superficies dari profitetur. Igitur ἐφαρμοσις vel ἐφαρμογὴ congruentia, ut Euclidi & Proclo dicitur, est duarum magnitudinū, quādo prima primis, media mediis, extrema extremis, partes denique partibus usquequaque respondent. Sic lineæ congruunt, quando puncta termināntia punctis, toteque longitudines totis longitudinibus eundem locum occupant. Sic superficies congruunt, quando lineæ terminantes lineis terminantibus, areæ terminatæ areis terminatis eundem locum occupant. Congruentia denique dicitur seu potentia seu actu, ut separatæ lineæ rectæ æquales, quæ sic applicari possunt. Atque in lineis & superficiebus ἐφαρμόσις multis in geometria locis usurpatur. Imprimis hinc oritur axioma illud axiomatū Euclidi primum, Quæ eidē æqualia: applicatione enim & ἐφαρμοσει magnitudinibus id convenit: Sic 17 d 1. congruunt in Proclo semicirculi per diametrum dissecti: sic triangula in Euclide ad 4 & 8 p 1. ex quarum propositionū fundamēto innumerabilia deinceps concludūtur, ut eorum omnium, fundamentum sit ἐφαρμοσις. Triangula item in Pappo ad 5 p 1. congruunt: Sic commune segmentum duabus rectis congruit ad 35 p 1. sic secūdo libro primę propositiōes planorū æqualitatē approbāt: sic sectiones circulares ad 24 p 3. congruunt: sic peripheriæ duæ & totidem circuli congruunt ad 30 p 3. Sic ad 11 & 15 p 4. congruunt, illic quinque, hic sex circuli: Sic (ut è lib. 10 patet) omnes magnitudines symmetras, quas quidem sine multiplicatione vel proportione metiare, ἐφαρμόσις metitur: Sic ἐφαρμοσις adhibetur 1 p 11. Sic ἐφαρμοσις postea erit mensura æqualium angulorum, quæ ipsa fere geometriæ anima est. Sic Archimedes 8 th. 1. Isorr. ἐφαρμοσιν habet triangulorū, & 20 th. in sphæroidibus ἐφαρμοσιν sphæroidum. Quin Archimedi 1 Isorrop. axioma quintum est: æqualibus & similibus figuris planis cōgruentib. inter se, & centra ponderum congruunt inter se. Itaque ex innumerabilibus congruentibus & lineis fit unica linea, & superficiebus una superficies. Sic Vitellio cum illis Euclidis exemplis consentiens postulat libro primo, cum duæ superficies pla-

cies planæ se contingunt, unam ex eis fieri superficiem. Corpora verò si congruant, videntur tantum congruere per superficies, & sic 10 d 11. corpora definiũtur æqualia, quæ comprehenduntur à superficiebus æqualibus multitudine & magnitudine. Et tamen hoc ipso, quod æqualia sunt, eundem & æqualem locum occupant. Et sic 1 d 1. de gravi & levi, corpora definiuntur magnitudine æqualia, quæ locum replent æqualem. Hoc ἐφαρμόσεως genere corpora liquidorũ siccorumque omnium metimur, replendo nempe æqualem locum. Sic monetarii monetas ex ęquipondiis laminis æqualis loci repletione æquales judicãt. Attamen Archimedes antea citato loco Sphæroidum ἐφάρμοσιν facit, & à Commandino nostro Archimedis centrobarica imitato postulatur: Solidis figuris similibus & æqualibus congruentibus centra quoque gravitatis inter se cõgruere: sed tamen ἐφάρμοσις ista, ut antea ἀφαίρεσις, mẽtis tantũ est, & magnitudinũ mente abstractarũ, non sensilium & physicarum, quæ singulas partes sensili loco discretas habent, ut corpora duo physica simul esse nequeant. Physicum autem & sensile tactu nihil est tantum lineare, aut superficiarium tantum, sed corporeum est, quicquid est physicum.

Itaque

Magnitudines congruæ sunt æquales. 8. axi.

Potest minor recta majoris parti congruere, neque toti æqualis esse, sed tantæ æqualis est quantæ congruit, nec tamen axioma istud reciprocum est, neque congruentia atque æqualitas reciprocantur. Triangulũ parallelogrammo æquari potest, neque tamen omnino congruere: & sic circulo quæritur æquale quadratum quamvis incongruum, quia ὁμοειδῆ similia specie tantum congruere possunt, ut Proclus ait ad 4 p 1. Itaque etiã parallelogramma non congrua possunt æquari, ut patet ad 35. 36 p 1. Neque vero nobis ἐφαρμόσεως axioma quisquam repudiet tanquam mechanicum, neque ideo geometricum. Nam Archimedem cum Euclide copulare libuit, & artis utilitatem cum veritate artis cõjũgere. Neque isto principio quicquam in geometria luculentius est, primaq; omnino geometrica mensura, quæ granis, digitis, palmis, pedibus, cubitis, passibus, decempedis, & similibus efficitur, ἐφαρμόσεως utique judicio efficitur, & falsum est, mechanicum quod sit, geometricum non esse: postulata enim & problemata omnia (quod geometricorum & principiorum & propositionũ genus alterum est) mechanica sunt: & cum theorematis differentiã vulgo habent, quod hæc contemplantur, illa fabricantur & machinantur. Symmetria & ratio totæ mechanicæ sunt, dum eadem mensura diversas magnitudines metiuntur, & comparãdo numerant. Itaque ἐφάρμοσις tota geometrica est, ut tot locis jam patuit, nec regulæ & circini (quibus omnia geometræ problemata fabricas & machinas suas fabricantur & machinantur) vis alia atque alia facultas est, quam ἐφαρμόσεως geometricæ: ut qui ἐφάρμοσιν à geometrica schola expellit, expellat ex eadem Euclidem & Archimedem, imo geometriam ipsam. Geometrice tamen agere non videatur qui mechanicam à geometricis principiis sejũxerit, ut vulgo solent imperiti opifices, & plerisque in rebus etiam mathematici, ut

tici, ut cum sine geometriæ principiis, solis instrumentis inveniunt duas medias continuè proportionales: Hic verò geometricum est principium ab Euclide & reliquis geometris approbatum.

10. *Magnitudines adscriptæ sunt inter se, quando unius termini alterius terminis terminantur: quæ intra est, dicitur inscripta: circumscripta, quæ extra.*

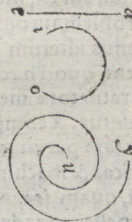
Sequitur adscriptio, cujus species sunt inscriptio & circumscriptio. Hęc igitur definitio generalis facta est è specialibus septem definitionibus de inscriptione rectæ in peripheriam 7 d 4. de inscriptione & circumscriptione rectilineorum inter se 2 d 4. de adscriptione rectilinei & circuli 3. 4. 5. 6. Adscriptione rectilineorum inter se Euclides non utitur in elementis: utitur autem 13. lib. adscriptione corporum ordinatorum in sphæram: neque tamen usquam definit. Definitio itaque generalis ab Euclide veritatem generalem accipiet, ut intelligamus rectā in periphæria terminari punctis, quomodo Ptolemæus vocat inscriptas circulo, & rectilineum terminari suis rectis, & circulum peripheria, & corpus planum suis planis superficiebus, ut postea patebit. Homogenea autem tantum inter se rectitermina & cum rotundo proprié adscribuntur. Heterogenea tamen lib. 15. adscribuntur, quinque nempe ordinata corpora plana inter se & recta inscribitur peripheriæ & triangulo. Adscriptionis verò rectilinei & circuli usus singularia mysteria tandem declarabit per rationes adscriptorũ, quæ clavis erit quædam præstantissimæ per subtensas vel inscriptas circulo (ut Ptolemæus loquitur, vel sinus, ut recentiores appellant) doctrinæ.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. II. de Linea.

Magnitudo est linea aut lineatum.

Communes affectiones magnitudinis expositæ sunt: sequitur dichotomia, quæ adhuc nobis occurrit.

2. *Linea est magnitudo tantum longa.*



Vt sunt a e. i o, u y. Talis autem magnitudo (ait Proclus ex Apollonio) concipitur dimensione viarum, differentiaque loci luminosi à tenebricoso: Euclidi 2 d 1 definitur linea longitudo latitudinis expers: & quidem longitudo propria est differentia lineæ, ut latitudo superficiei, soliditas corporis.

3. *Lineæ terminus est punctum.*

Euclides 3 d 1. lineæ extrema ait esse puncta: antè verò de termino generaliter locuti sumus, & nunc lineæ proprium intelligatur punctis terminari. Peripheria autem cum nec initium nec exitum habeat

videtur

videt pũctis nõ terminari: at cũ describitur, á pũcto aliquo incipit, & in aliquod pũctũ desinit. Quare pũctũ est terminus lineæ, modo actu, ut in linea recta, modo potẽtia, ut in peripheria perfecta: Imo vero, ut antea patuit in cõtinui definitione, punctis quælibet lineæ seu rectæ, seu obliquæ cõtinẽtur. Linea vero lineatur motu puncti. Omnis enim magnitudo generaliter geometrico motu creatur, ut jam dictũ est, & deinceps per species patebit, ut fiant uno motu totæ figuræ, ut conversione circulus, sphæra, conus, cylindrus multiplicatione basis & altitudinis rectangula parallelitermina.

4. *Linea est recta vel obliqua.*

Partitio est é 4 d 1. Vbi rectitudo attribuitur lineæ, tanquam inde superficies & corpus rectitudinem assequantur: & certe sic Euclides videtur probare 17 p 13. quinquangulum dodecaedri esse planum, id est rectum, quia rectam capiat, quod & Proclus ad 7 d 1 indicat. Corpus planum id est rectum, definitur á superficie plana 9 & 10 d 11, & sic omnino rectitudo solidæ figuræ postea intelligetur per rectam á vertice in centrum basis perpendicularem. Itaque rectitudo est lineæ, ideoque & obliquitas, unde superficies recta vel obliqua, & corpus rectum vel obliquum judicatur.

5. *Linea recta est linea, quæ intra suos terminos æqualiter interjacet: obliqua contrá.* 4 d 1.

Aequaliter autem intra suos terminos interjacet linea, quãdo non hic humilior, illic altior, sed æqualis est spatio intra duos terminos comprehẽso: ut hic *a e*. Sic qui rectum iter facit, vulgò dicitur tantum itineris conficere: quantum necesse est, qui facit obliquum plusquam, oporteat, ut Proclus ait. Itaque

Recta est brevißima intra eosdem terminos.

Consectarium est Archimedeum ad 1 post 1 de sphæ. & sic Platoni postque Platonem Euclidi in catoptricis linea recta est, cujus media extremis officiunt, ut in solis ellipsi si linea recta á sole per lunam ad oculum nostrum duceretur, media ipsa luna nostris luminibus officeret, solisque aspectum nobis adimeret, quod ex opticis sumptum est, in quibus docetur visum rectis radiis fieri. Itaque quod Euclides definit rectum in linea per æqualem inter puncta tanquam diceres interjacentiam, id est per æquale intervallum, illud ipsum est Archimedi brevissimum intra eosdem terminos, quodque Platoni & Euclidi medium extremis officit.

6. *Linea obliqua tangitur á recta vel obliqua, quando ambæ ita concurrunt, ut continuatæ non intersecentur.*

Tactus proprius est obliquæ lineæ ad lineã rectã vel obliquã, ut cõstat é 2 & 3 d 3. Recta circulum tãgere dicitur, quæ tangẽs circulum & producta non secat circulum, 2 d 3: ut hic *ae* recta tangit peripheriam *iou*, & *ae* tangit helicen. Circuli sese tangere dicuntur, qui tãgentes sese non secant, 3 d 3. Vt hic peripheria *aei* tangit peripheriam *ouy*. Hæ speciales Euclidis definitiones circulum pro peripheria nominãt, & tactum á sectione, & sectionis potentia distinguũt. Alioqui tactus verbum etiã in elementis commune est pro quolibet concursu: sic 8 d 1 angulus planus definitur inclinatio linearũ sese tangentium in plano. Itaque

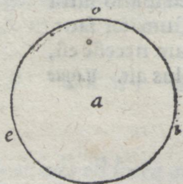
Tactus fit unico puncto. é 13 p 3

Consectarium protinus é definitione intelligitur, alioqui sectio esset non tactus. Sic Aristoteles in mechanicis ait rotundum esse mobilissimum & velocissimum, quia minime tangatur á subiecto plano.

7. *Linea obliqua est peripheria aut helix.*

8. *Peripheria quæ distat æqualiter á medio comprehensi spatii.*

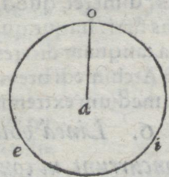
Vt *eio* distat æqualiter ab *a* medio comprehensi spatio.



Itaque

Peripheria fit conversione lineæ altero termino quiescente, altero lineante.

Vt in *eio* maneat punctum *a*, & convertatur linea *ao*, ita ut punctum *o* imprimat vestigium, fiet peripheria *eoi*. Ex hac fabrica Euclidi peripheria definitur 15 d 1. & sic sphæra, conus, cylindrus eidẽ definiũtur. Linea vero quæ convertitur, recta vel obliqua esse potest in plano: obliqua duntaxat est in sphærico: in conico autem & cylindraceo recta potest esse, ut latus est coni & cylindri. Itaque in cõversione lineæ peripheriam procreantis spectatur tãtum intervallum: imo puncta duo, alterum in centro, alterum in

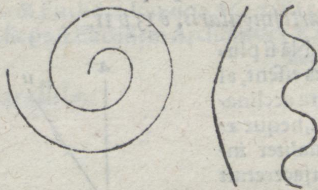


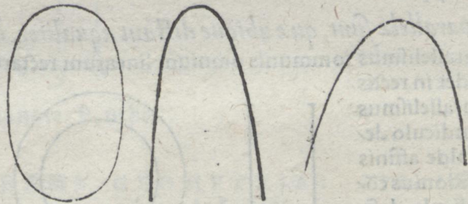
summo,

summo, quæque ideo Aristoteles 10 cap 8. Phys. nominat rotundi principia.

9. *Helix est quæ distat inæqualiter á medio utcunque comprehensi spatii.*

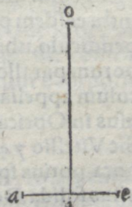
Hæc aũt tortuosa linea ἑλικοειδὴς Proclo dicit, at helix etiã dici potest, cujus variæ species sunt, ut Arithmetica quæ est Archimedis helix, ut cõchois, ut cittois: quæ in geometria suos postea authores habuerunt Archimedem, Nicomedem, Geminum. Linea autem τετραγωνίζουσα (cujus ope circulus quadratur) & admirabilis, celebrantur: τετραγωνίζουσαν Dinostrato, Nicomedi, Hippiæ. Pappus initio tertii & Proclus 9 p 1 attribuunt. Pappus admirabilem attribuit Menelao: Conicæ verô ellipsis, hyperbole, parabole, quales hic sunt, attribuuntur Menechmo. Apollonius eas libris 8 complexus est, quas omnes mistas lineas, ut explicatu enumeratuq; difficiles Euclides prætermisit, ait Proclus ad 9 p 1.





10. *Lineæ inter se rectæ sunt, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet: obliquæ contrá. é 10 d 1.*

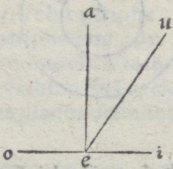
Adhuc affectiones unius & solius lineæ fuerunt rectitudo & obliquitas: duarum inter se affectiones sunt perpendiculum & parallelismus, qualescunq; sint rectæ vel obliquę: perpendiculum primo definitur generaliter. Sic duæ rectę in plano perpendiculares sunt. Vt a e & i o. Sic duę peripheriæ in sphærico erunt perpendiculares, quando altera in alteram incidens æqualiter interjacebit, nec quoquam inclinabit. Sic recta peripheriæ perpendicularis fuerit, si incidens neutro acclinet, sed æqualiter interjaceat. Denique ut de primo & composito numero, primisq; inter se & compositis inter se numeris dictum est, duos primos esse primos inter se, item duos primum & compositum, denique cõpositos ipsos posse inter se primos esse: sic duæ rectæ possunt esse rectæ inter se, sic item recta & obliqua, denique obliquæ duæ. Atque omnino lineæ inter se rectæ



& perpendiculares pro eodem dicuntur, & à perpendiculo linearum perpendiculum superficierum sumitur, ut patebit postea: De corporum perpendiculo nullum est in elementis verbum, attamen etiam corpus rectum corpori judicatur per lineam perpendicularem. Itaque

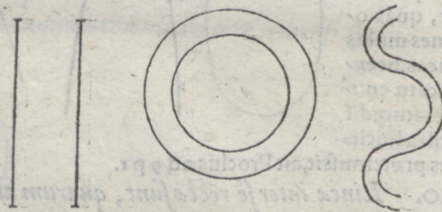
Si recta est perpendicularis rectæ, est ab eodem termino & eadem parte singularis. è 13 p II.

Nã si plures essent, altera acclinaret, neque æqualiter interjaceret: ut hic vides in rectis *a e*, *i o*, *e u*. Proclus ad 17 p I.



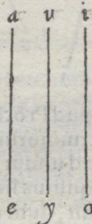
II. *Lineæ parallelæ sunt, quæ ubique distant æqualiter.* è 35 d I.

Sequitur parallelismus communis omnium linearum rectarum & obliquarum: ut hic vides in rectis & obliquis. Parallelismus autem è perpendiculo derivatur, & ei valde affinis est. Itaque Posidonius cõmuni perpendiculo definiebat parallelismũ: quæ vis nostræ definitionis est. Et sic Euclides circulo inscriptarum à centro æquidistantiam metitur æqualibus perpendiculis, 4 d 3. Sic etiã ad rem multo propius Euclides idem metitur parallelorum altitudinem & distantiam 4 d & 1 p 6: Sic enim dicũtur 1 p 6 æquealta, quæ 35.36.37.38.39.40.41 p 1 dicũtur esse intra easdem parallelas. Sic 6.8.14 p 11 dijudicat parallelismum communi perpendiculo, ubi & parallelismus superficierum erit è parallelismo linearum. Corporum parallelismus in elementis nusquam appellatur, sicuti neque perpendiculum appellatum est. Est tamen & quidem è parallelismo linearum, magniq; usus in Optica, Mechanica, pictura, architectura per lineas nempe parallelas. Sic Vitellio 74 p 1 sphæras parallelas appellat, sed sphæras concentricas, & corpora potius spherica quàm sphæras. Nam cava sunt intus illa corpora, non penitus solida: Denique sic appellat sphæras parallelas, uti peripherias concentricas parallelas diceres. Parallelismus igitur, ut è definitione patet, est linearum, indeq; ad superficies & corpora, ut rectitudo & obliquitas & perpendiculum transfer-



transfertur: secus si quid dicitur, sensus tamen huc respicit, ut cum Vitellio ad definitiones 6 l & ad 49 p 6 dicit lineam rectam esse parallelam sphæræ, intelligit quando est parallela rectæ sphæram tangenti, & sic rectarum inter se etiam tum parallelismus est: non est vero prætereunda etymologia παραλλήλων. Nam παράλληλα contra se, & é regione posita dicuntur, sæpeque authores sine compositione sic usurpant. Sic Aristoteles appellat γραμμὴν παρὰ τὴν γραμμὴν pro lineis parallelis lineam contra lineam. Quomodo & Euclides loquitur ad 10 & 15 p 11, & multo sæpius in opticis: sic in Datis, & sic post Euclidem Archimedes & Apollonius loquuntur. Itaque

Lineæ eidem parallelæ sunt inter se parallelæ.



Hoc elemẽtum proponitur specialiter de lineis rectis, & demonstratur 30 p 1. At ꝑ additionẽ æqualiũ distantiarũ æqualis distantia nota est, ut hic.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IIII. de Angulo.

Lineatum est magnitudo plusquam longa.

Nova doctrinæ forma coëgit novis uti plerumque vocabulis, præsertim in partiendo, ut ad logicam perfectioris partitionis legem dichotomia teneretur. Itaq; magnitudo bisecatur in lineã & lineatũ, & lineatũ genus erit superficiei deinceps & corporis: lineatũ quippe, in quo lineæ sint. Possunt enim duci lineæ in superficie, quod proprium est linearum solum, possunt in corpore, ut diameter in prismate, axis in sphæra, omninoque sublimes lineæ. Ideoque Proclus ad 4 d r, item 12 & 35 p 1 lineas facit alias planas, alias solidas. Sic conicæ lineæ, ellipsis, hyperbole, parabole, solidæ vocantur, quia oriuntur é corporis sectione.

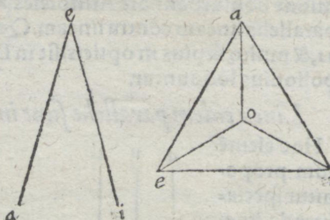
2. *Lineati est angulus & figura.*

Communes affectiones magnitudinis fuerunt terminari, secari, commensurari, congruere, adscribi: deinde lineæ dirigi, obliquari, tangi, converti, torqueri, quæ omnia etiam in lineato sunt per lineam. Lineati est angulari & figurari. Angulus porro & figura in tota ratione geometricarum rerum utramque

fere paginam faciunt. Itaque diligenter utrumque considerandum est.

3. *Angulus est lineatum in communi sectione terminorum.*

Sic angulus superficiarius est superficies in communi sectione duarum linearum, sic angulus solidus est corpus in communi sectione trium minimum superficierum. Sic angulus *a e i* superficiarius est. sic angulus comprehensus à tribus superficiebus *a o i, i o e, a o e* solidus est, neque superficies duarum dimẽsionum una recta linea, neque corpus trium dimensionum duabus superficiebus saltẽ planis terminatur. Hæc generalis est definitio anguli, qui totis mathematicis tractatur, ubi angulus bisecatur, ubi æqualis major, minor instituitur. Hæc (inquam) generalis est definitio anguli, quæ quantum negotii veteribus mathematicis exhibuerit, ostendit ipsorum inter ipsos cõtroversia apud Proclum 8 d 1. Carpus angulum definiebat intervallum sub inclinatione terminorum ad unum. Apollonius & Plutarchus Carpum sequebantur, illud (ad unum) interpretati primum. Proclus præceptorem Syrianum (opinor) sequutus licet verbo longissime ab iis dissentire videatur, tamen reipsa huc accedit, dum angulum superficiarium definit superficiem in uno signo ab inclinatis lineis collectam, solidum ab inclinatis superficiebus. His igitur authoribus angulus definiatur lineatum in communi sectione terminorum. Carpi vero ad unum, Apollonii & Plutarchi primum intervallum erat adversus elenchum, ne totum lineatum ubique angulus esse diceretur, sed tantum in ipso communis sectionis puncto, ubi terminatur ab inclinatis terminis. Euclides 8 d 1 & 11 d 11 definit angulum inclinatione linearum, in quo reprehenditur á Proclo. Caussa dicetur in scholis.



4. *Crura anguli sunt termini comprehendentes angulum.*

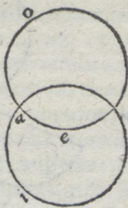
Crura σκέλη dicimus basi anguli insistentia, quæ in triangulo æquicruro tantum nominavit Euclides, latera alias appellat. At proprietas ut rei, ita sermonis placet. Sic in exemplis positis duæ lineæ sunt *e a, e i* crura superficiarii anguli: sic superficies tres *a e i, i e o, a e o* sunt crura anguli solidi. Itaque crura angulantia sunt lineæ, aut superficies: angulata autẽ lineata sunt superficies aut corpora.

5. *Anguli homogenei sunt anguli cruribus & crurum concursu genere iidem.*

Itaque homogenia ista duplex est, prima crurum, secunda concursus: sic anguli recti rectilinei sunt homogenei inter se. Recti autem rectilinei rectis obliqui lineis sunt heterogenei, sic non omnes obtusi omnibus obtusis, nec omnes acuti omnibus acutis homogenei sunt: nisi adsit homogenia & crurum & concursus. Lunularis systroidi & pelecoidi crurib. est homogeneus: quilibet enim comprehenditur á peripheriis: lunularis altera concava, altera convexa, ut *i a e*:

ſyſtroides ab utraque convexa, ut ιαο: pelecoides ab utraque concava, ut εαυ.

Lunularis tamen concurſu eſt heterogeneus ſyſtroidi & pelecoidi. Itaque & abſolute heterogeneus. Hæc igitur diſtinctio præcedat ad diſtinctionẽ ſequentium. De homogeneis igitur angulis ſolis ſequentia ſunt, ne ſæpius idem verbum repetatur.

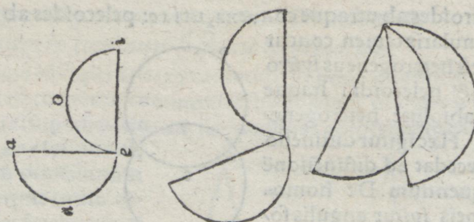


6. *Anguli cruribus congrui ſunt æquales.*

Hoc axioma prætermiſſum in elemẽtis geometricis magnas obſcuritates peperit: bene autem & ex ordine conſtitutum permagnam lucem afferet. Eſt igitur ê prima illa ἐφαρμόσεως luce. Nam ſi bis bina crura congruant, non quatuor, ſed duo crura erunt: neq; tam duo anguli æquales quam angulus unus. ſedenim axioma iſtud æqualium angulorum jam olim in ſcholis mathematicis agitatũ eſt, ut patet é Proclo ad 4 p 1. Illic enim ſic loquitur Proclus: Angulus rectilineus rectilineo æquatur, quando crure altero alteri ſuperpoſito reliquum reliquo congruit, cum reliquum crus cadit extra, angulus eſt major extra cadentis cruris: cum vero cadit intra, minor: illic enim comprehendit, hic comprehenditur. Angulorum igitur rectilineorum æqualitas ſumetur ſecundum congruentiam crurum in rectilineis: item in cæteris omnibus, qui ſunt ὁμοειδεῖς ejuſdem ſpeciei. Hic igitur Proclus affirmat æquales angulos, quorum crura applicata congruunt, quod noſtrum axioma eſt, & ὁμοειδείαν notat, quam diximus ὁμογένειαν. Veritas autem axiomatis hujus eſt ê congruentiæ axiomate. Quia duo lineata hic unum eſt ἐφαρμόσει. Itaque axioma iſtud illinc erit immenſæ quidẽ lucis & utilitatis. Nam materies 4.5.6.7.8.9.10.11.12.18.19.21.23.24.25.26 p 1 ex iſta generali luce lucem accipiet, & ſi de pyramide in ſolidis ſimilia docerentur, indidem lucem etiam caperent. Ergo quod generale & commune eſt tam multis elementis, præponitur, quod ſpeciale eſt, hinc poſtea derivatur facilitate prorſus admirabili, ſi quis myriades ſyllogiſmorum Euclideorum & directẽ & per impoſsibiſe concludentium cum brevibus conſectariis noſtris comparet. Congruentia tamen & æqualitas angulorum non reciprocantur. Nam rectilineo recto lunularis æquari poteſt, ut Pappus apud Proclum in axiomate de angulis rectis docet; ut hic vides.

Nam an-

Nam anguli semicircu lorum æqualium *i e o* & *a e u* æquantur, quod ἐφάρμοσις ostendet: cõmunis est angulus *a e o* recto *a e i*, & lunulari *a u e o*: addatur igitur utriq; cõmunis *a e o* æquabitur rectus *a e i*, lunulari *a u e o*. Potest vero & idem lunularis æquari obtuso & acuto, ut idem argumentum demonstrabit.



Itaque

1. *Si angulus angulo æquicrurus æquatur basi, est æqualis, & si est æqualis, æquatur basi. ex 8 & 4 p 1.*

Nam cruribus erunt congrui, & basibus item congrui.

Et

2. *Si æqualis basi est æquicrurus, æquatur.*

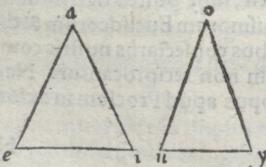
Nam congruentia eadem est: non tamen si æquales æquātur basi, sunt æquicruri, ut in angulis in eadem sectiõe apparebit, ut hic: & sic é duabus æqualitatibus prima reciprocatur, secunda non item.



Et

3. *Si angulus angulo æquicrurus est major basi, est major, & si major, est major basi, é 25 & 24 p 1.*

Vt hic *a e i* major basi q̃ *o u y*.

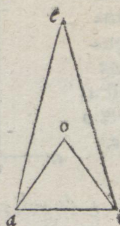


Et

4. *Si æqualis basi est minor interioribus cruribus, est major.*

Vt hic interior *a o i* est major exteriore *a e i*: interioribus autem additur necessario:

cessario : secus apparebit error in illa sectione. Ex eodem illo congruentiæ axiomate, hæc rursus omnia deducuntur, quod Proclus ad 8 p 1 luculenter exposuit. Videtur autem (ait) æqualitas crurum & basium facere æqualitatem verticalium angulorum. Neque enim si bases sunt inæquales, æqualitas crurum eosdem angulos relinquit: At si minor sit basis, angulus decrescit: si major, augetur: neque si bases sunt æquales, crura inæqualia: angulus manet: at dum imminuuntur, augetur: dum augentur, imminuitur: Cōtrarium enim accidit angulis & angulorum cruribus. Nam si crura in eadem basi deorsum depressa cogites, ipsa quidem minuis, eorum vero angulum auges, majoremque ipsorū inter ipsa distantiam facis: Sin cogites sursum erecta atque aucta, angulum minuis. Quanto enim amplius coincidunt, tanto magis à basi vertex removetur. Quare certum sit affirmare, quod basis eadem & crura æqualia definiunt æqualitatem angulorum. Hic Procli locus facit æquales angulos æqualitate crurum basiumq;, ut anguli sint æquales, qui crurum æqualium bases habent æquales. Nam homogenea æqualitas crurum est ipsa congruentia, sed à Proclo homogenia prætermittitur, sine qua tamen consectarium falsum sit. Quare axioma congruentiæ præponimus, & ex eo consectarium hoc, sed emendatum deducimus. Veruntamen ad ejus consectarii constantiam commentarii veterum è Proclo non sunt potius excutiendi, quam Euclides ipse ad 23 p 1 & 26 p 11 attendendus: cum ex hac æqualium angulorum materia nō consectarium postulat, sed demonstrabilē propositionē duplicem de rectiterminis angulis facit. Interroga nempe Euclidē ad 23 p 1, quomodo dato angulo rectilineo æqualē facturus sis, respondebit, si crurum æqualium bases æquaveris: idemque ad 26 p 11 de solido angulo plano Euclides profitetur. Itaque Euclidi magna gratia pro tāto beneficio à geometris debeatur: unde licebit magnā postea variarū propositionum familiam derivare, neque vereamur ne objiciatur hoc axioma ab Euclide demonstrari. Nullo enim antecedente elemento utitur Euclidis demonstratio, quod postulandum non fuerit, ut illic intelligetur, & tamen materies ex axiomate protinus postulanda fuerat. Itaque & nos postulavimus, & fabricam tamen interea æquandi anguli non minus geometricam retinemus, sic de problemate maledubitato αἴτημα per se indubitatum facimus. Oenopides aūt problematis de æquando angulo primus author à Proclo efficitur, de cujus inventis in procœmio dictum est.



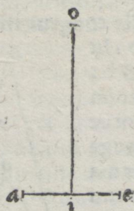
Itaque

5. *Si dati anguli cruribus ad datum punctum crura homogenea æquētur æqua basi, æquabunt angulum dato. é 23 p 1. & 26 p 11.*

7. *Angulus est rectus vel obliquus.*

8. *Rectus cujus crura sunt inter se recta, obliquus contra.*

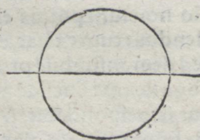
Rectus angulus est a i o & o i e.



Itaque

Anguli recticruri recti sunt æquales.

Axiomata de æqualitate angulorum tria jam fuerunt, unum generale, duo consectaria: Hic de æqualitate rectorum angulorum speciale præterea unum est. Angulos homogeneos recticruros, id est quorum crura sunt recta, ut lineæ rectæ, ut superficies planæ (hoc enim verbum nobis concedatur) rectos æquales esse: sic anguli rectilinei recti propositi sunt æquales: sic anguli solidi plani recti, ut in cubo, sunt æquales. Axioma igitur commune potest esse etiam de solidis angulis modo recticruris: quia non omnes semicirculares recti omnibus semicircularibus rectis sunt æquales: ut hic cū diameter sit cōtinuata perpendicularis est, & facit bis binos intus forisque externos æquales inter se, & interiores æquales inter se, sed externos interioribus inæquales, & majoris semicirculi angulus major est angulo minoris. Neque omnino affectio reciproca est, ut omnes anguli æquales sint recti: possunt enim obliqui inter se æquari, & potest obliquus æquari recto, ut lunularis rectilineo, ut patuit. Obliqui anguli definitio é crurum obliquitate intelligitur: unde etiam patet angulum obliquum inæqualē esse recto homogeneo: neque ulla lege obliquos angulos æquari: quia infinite obliquitas augeri minuique potest.

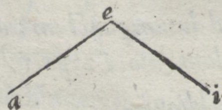


9. *Angulus obliquus est obtusus aut acutus.*

Obliquitatis alia differentia fuit in linea, peripheriæ nempe & helicis, hic alia dichotomia est obtusum & acutum, quæ differentia propria est angulis, unde alio transfertur: ut ingenium obtusum, acutum, & similia.

10. *Obtusus est obliquus major recto.* II d.I.

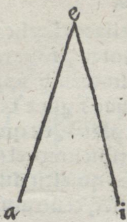
Vt hic a e i. Intelligitur in definitione genus speciei utriusque: Nam rectus rectilineus est major recto sphærico, neque tamen obtusus est: hæc autem major inæqualitas infinite potest augeri.



II. *Acutus*

11. *Acutus est obliquus minor recto, 12 d 1.*

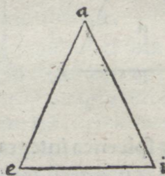
Vt *aei*. Hic genus idem intelligatur, quia non omnis angulus minor quolibet recto acutus est: nam rectus semicircularis & sphęricus minor est recto rectilineo, neque tamen est acutus.

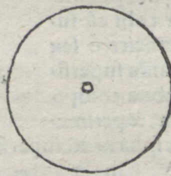


P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IIII. de figura.

F*igura est lineatum undique terminatum.*

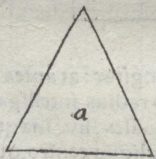
Sic triangulum *aei* est figura, quia est planum tribus lateribus undique terminatum. Sic circulus est figura, quia est planum una peripheria undique terminatum. Sic 14 d 1 figuram cum definit Euclides, quod ab aliquo, aut ab aliquibus terminis comprehenditur, lineam figurã nõ facit, cum linea duobus tantum pũctis ad extrema duo terminetur, neq; longitudo sola expers latitudinis potest in latum terminari. Figura itaque lineatum tantũ est, sed sequentia figuræ generatim in superficie & corpore rem totam declarabunt.

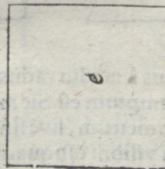




2. *Centrum est punctum in figura medium.*

In figuræ parte aliqua spectantur centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. Centrum igitur est punctum in medio figuræ: sic in triangulo, in quadrato, in circulo cẽtrũ est *a, e, i*. Centrum videtur Euclides 16 d 1 & 16 d 11 rotũdæ figuræ ꝓprie attribuere, quomodo & Apollo oraculi sui carmine definivit,





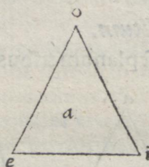


Κέντρον ἀφ' οὗ πᾶσαι μέχρις ἄντυγος ἶσαι ἔασιν.
Centrum á quo omnes usque ad oram æquales sunt.

Verum ne hic Apollo quidem, quamvis deliaco duplicandi cubi problema te mathematicus haberi voluerit, tamen Aristoteli probaretur generale specia liter definiendo. Nam 3 & 4 p 15 centra quadratorum appellantur, item 4 p 15 centra triangulorum, quomodo cujuscunque figuræ centra dicentur: & cẽtrum gravitatis dicitur in omni magnitudine plana, ex qua suspensa est parallela horizonti: ut ex Archimede & Eutocio perspicitur, vel (ut Pappus ait 8 theor. 8 lib) est punctum á quo suspensum pondus quiescit dum fertur. Itaque si lamina aliqua partibus omnibus æque gravis esset, centrum idem esset magnitudinis & gravitatis.

3. *Perimeter est comprehensio figuræ.*

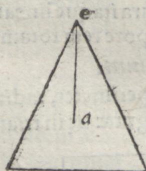
Hæc definitio est nominis græci. Ergo perimeter trianguli est una é tribus lineis composita linea: ut á Proclo dicitur 4 p 1. sic trianguli *a* perimeter est *e i o*. Sic perimeter circuli est peripheria, ut in *e i o*. Sic perimeter cubi est superficies é sex planis superficiebus composita, & perimeter sphæræ est superficies sphærica integra, ut postea patebit.

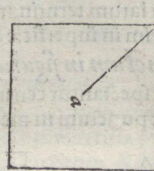


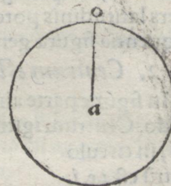


4. *Radius est recta á centro ad perimetrum.*

Vt in subjectis figuris *a e, a i, a o, ἀκτὶν* radius est verbum Platonis in Timæo rotundum definientis, cujus omnis extremitas paribus á medio radiis attingitur: at antea centrum pro cujus libet figuræ medio sumptum est. Sic modo radius intelligatur pro qualibet distantia á centro ad perimetrum, sive sint æquales, sive inæquales: quomodo in opticis radii dicũtur á visibili tanquam ab aliquo centro, quoquô versus rectis lineis agi. In geometricis elementis radii nomen nusquam est, sed periphrasis perpetua, Quæ ex centro, cum de circulo agitur.

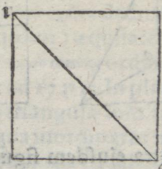


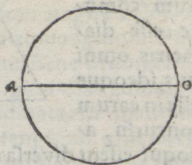




5. *Diameter est recta inscripta figuræ per centrum.*





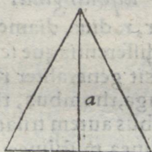


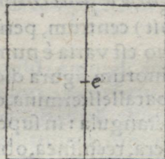
Vt in subjectis figuris *ae*, *ai*, *ao*. Diameter est recta linea in circulo ad 17 d 1: in parallelogrammo ad 34 p 1: in sphæra ad 17 d 11: in prismate ad 39 p 11. Diameter trianguli etiam similiter est, & omnino cujuscunque figuræ, quia ut antea dictum est, figuræ cujuscunque centrum est, tametsi & centri & diametri nõ proinde facilis sit inventio. Diagonius autem dicitur, quando terminatur oppositis angulis, ut 28 p 11, ut in demonstratione 39 p 11. sed in planis & rectilineis proprie. Nam potius in solidis axis dicitur, ut patebit postea: ut vero ex infinitis per totam figuram punctis unicum centrum est, sic ex inæqualibus lineis infinitis per totam figuram ea sola diameter est, quæ per centrum transit. Itaque

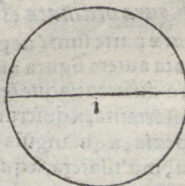
1. *Diametri in eadem figura sunt infinitæ.*

Diameter quamvis ex infinitis inæqualibus ea sola sit, quæ per centrum, attamen per centrum varia esse potest: in circulo res apertissima est, ut in astrolabio index volvi potest per omnia puncta peripheriæ: sic in sphæra & rotundis res facilior est, ubi diametri sunt æquales, in reliquis tamen res eadem: quia diameter est recta per centrum inscripta, utrum ad angulos an ad latera terminetur, nihil interest. Itaque diametros infinitas in eadem figura esse, est è diametri definitione. Et

2. *Centrum figuræ est in diametro.*





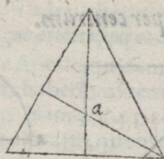


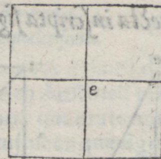
Vt hic vides *a*, *e*, *i*. Hoc est è diametri definitione. Nam quia diameter inscribitur figuræ per centrũ, ideo centrum figuræ in diametro esse necesse est: id præcipue assumit Archimedes 9.10.11.13 th. 1. Isorro. Et

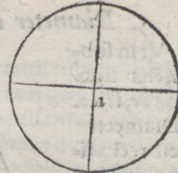
3. *In concursu diametrorum.*

Hoc item est ex eadem definitione diametri, ut hic. Nam cum diameter quælibet sit

libet sit per centrum, necesse est centrum cõmune esse diametris omnibus, ideoque esse in earum concursu, alioqui essent diversa centra ejusdem figuræ. Id vero nominatim Archimedes proponit in Isorropicis 8 & 12 th. 1 Isorr. de parallelogrammis & triangulis præcipiens.



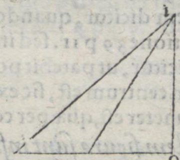


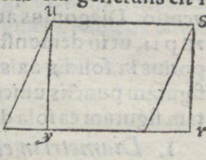


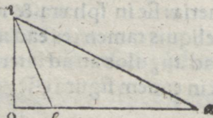
6. *Altitudo est perpendicularis á vertice figuræ ad basim.*

Vt in subjectis figuris sunt *ae, io, uy* vel *sr*. Hæc definitio ita generalis est in Euclide 4 d 6, cõmunis in plano rectilineis & circulis, in solido pyramidibus, prismatis, sphæris, conis, cylindris, cõmunis denique omni figuræ: nec vero interest utrum basis eadem sit, an longius continuata, ut in triangulo, obtusangulo, cũ basis est ad obtusum. Vt hic in triangulo *aei* est *ao*.









7 *Figura ordinata est figura æquitermina & æquiangula.*

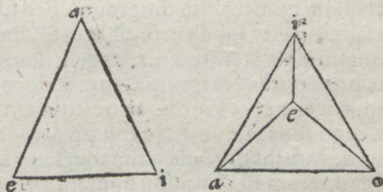
In figuræ parte sunt (ut patuit) centrum, perimeter, radius, diameter, altitudo. In tota autem figura affectio est varia é numero differentiaque terminorũ: á numero differentiaque terminorum figura dici posit generaliter rectitermina, æquitermina, æquicrura, parallelitermina, oblonga, rhombus, rhomboides, trapezia, æquiangula, rectangula: in superficiebus autem trilatera, quadrilatera, multilatera, æquilatera, rectilinea, obliquilinea, mistilinea: in solidis tetraedra, pentaedra, polyedra, plana, sphærica, conica, cylindracea: á numero differentiaque angulorum in superficiebus triangula, quadrangula, multangula: in solidis similis differentia nominari non solet, quamvis tamen insit. Hæ vero differentiæ aut suis nominibus intelliguntur, aut speciatim per suas species intelligẽtur. Tres igitur affectiones generales hic videntur definiendæ: figuræ ordinatio, primatus, & ratio. figuræ vero ordinatæ definitio nomina

tim non

tim non est in elementis Euclidis, attamen ex 25.26.27.28. 29 d 11 sumi potest, ubi adhibentur ad ordinatorum corporum definitionem plana, æqualia, æqui latera & æquiangula. Sic Theon τεταγμένον σχῆμα definit primo magnæ constructionis: (cum de planis rectilineis loquitur) æquilaterum æquiangulum. Pappus autem & græci alii vocant τεταγμένον σύντακτον ordinatum, bene ordinatum: Campanus pro eodem regulare dixit ad 17 p 13. In planis igitur triangulum æquilaterum est ordinatum, & reliqua triangula sunt inordinata: in quadrangulis quadratum est ordinatum, reliqua inordinata: multangulum generis cujusque potest esse ordinatum. In obliquilineis circulus est ordinatus, quia æqui terminus, cum terminus pro terminis innumerabilibus unicus & singularis sibi ipsi præcipue sit æqualis, quia æquiangulus, cum (licet reipsa nullus insit angulus) par tamen & æqualis utique sit inclinatio & velut angulus peripheriæ sibi ipsi semper æqualis: unde Platoni ac Plutarcho circulus dicitur polygonia, & Aristoteli ὅλη γωνία totus angulus. In mistilineis nihil est ordinatum: in solidis, & pyramidibus tetraedrum est ordinatum, é prismatis cubus, é polyedris tria tantum octaedrum, dodecaedrum, icosaedrum: In obliquilineis sphæra est ordinata eodem argumento quo circulus.

8. *Figura prima est figura in alias simpliciores figuras individua.*

Sic in planis prima est triangulum, quia in simpliciorem figuram dividi nõ potest, quamvis multis modis dissecari possit: sic in solidis pyramis prima figura est, quia in simpliciorem corporis figuram dividi non potest: licet in alias innumerabiles possit dividi: á triangulo autem omnia plana oriuntur, ut á pyramide corpora, quales figuræ sunt *aei, aeio*.



9. *Figura rationalis est quæ comprehenditur á basi & altitudine rationalibus inter se.*

Sic Euclides 1 d 2 dicit rectangulũ comprehendi á duabus rectis inter se, quippe multiplicatis. Geometrica enim comprehensio est interdum velut in numeris multiplicatio. Itaque si dederis basin & altitudinẽ rationales, ut earum ratio sit explicabilis numero datæ mensuræ, tum numeris laterum multiplicatis explicabitur magnitudo figuræ. Generis hujus definitio materiam demonstrabilis propositionis Euclidi præbuit, 20 p 10 de rectangulo rationali: At materiam principii præbere debuit, ut præbuit 16.17 d 7 in definiendo plano & solido numero. Tales enim numeri significant figuras rationales explicabiles numero, & numeri multiplicati inter se facientes numeros illos planos, solidosq; latera figurati numeri dicũtur ab Euclide in illis definitionibus. Figura itaque rationalis fit duobus rationalibus lateribus inter se multiplicatis: & per synec-

dochen

dochen ita figura unica dicitur rationalis, per latera nempe rationalia, tales figuræ tandem erunt in planis parallelogrammum rectangulum, in solidis rectis prisma & cylindrus, unde reliquarum omnium figurarum ratio & mensura capietur.

Itaque

Numerus figuræ rationalis figuratus dicatur, & numeri unde fit, latera figurati.

E specialibus nominibus plani, quadrati, solidi, cubi quibus Euclides utitur, generale figurati nomen hic factum est, & anologia eadem numeros factores figurati, lateratos dici conveniebat: latera tamen dicta sunt Euclidi, neque tropum mutari necesse est. Geometria vero sui & generis & juris magnam quidem partem est, neque aliter quam geometrice tractabilis: attamen parte quadam numeris associatur, & iis explicatur, numerique geometricarum affectionum interpretes geometricis vocabulis appellantur (ut dixi) planus, quadratus, solidus, cubus á geometrico plano, quadrato, solido, cubo: quorum umbræ quædam tales numeri sunt. Sic Euclides ait sed specialiter 19 & 20 p 10 rectangulum comprehensum á rectis longitudine symmetris esse rationale: & si rationale ad rationalem comparatum sit, latitudinem efficit rationalem & symmetram basi: ut si rectangulum comprehenditur á basi 4 & altitudine 3, erit rationale nempe 12, & rectangulum rationale ut 12 comparatum sit ad basim rationalem 4, facit latitudinem rationalem nempe 3: Quæ leges multiplicationi & divisioni numerorum congruunt. Sed id generaliter de quavis figura rationali seu plana seu solida verũ est, & in solida basis sumitur pro duplici dimẽsione longitudinis & latitudinis. Itaq; Aristot. generaliter ait 7 c 1 Post. arithmeticã demonstrationẽ magnitudinum accidentibus convenire, cum magnitudines numeri fiunt: Et Proclus ait quicquid in geometria ῥητὸν καὶ γνωστὸν explicabile & cognobile sit, numeris explicari & cognosci. Sed Proclus idẽ huc nescio quomodo intuens nec satis animadvertens ait figuram esse propriam geometriæ, quod verum est: sed addit figuram á geometria ad arithmeticam κατὰ ἀναλογίαν pervenire. Analogia igitur ista mathematicos omnes & græcos & latinos decepit, ut figuratorum numerorum doctrinam arithmeticæ attribuerent, eo moti fortasse, quod videatur multiplicatio (quæ propria est arithmeticæ) omnes talium figurarum affectiones explere, sine continuitate, sine contactu, sine angulo, sine situ, id est sine magnitudinis affectione. Verum magna differentia hic est. Multiplicatio enim arithmetica est unitatum, ut 4 per 3 facit 12 unitates: at cum lineam 4 pedum ducis angulo recto secundum lineam 3 pedum, facis nõ lineam 12 pedum, sed superficiem planam 12 pedum quadratorum, aliudque omnino est genesis arithmetica, aliud geometrica: principiumque numeri est pars numeri, principium magnitudinis non est pars magnitudinis. Itaque rerum quidem magna hic dissimilitudo est, verborum autem sola similitudo: ac licet figurarum & planarum & quadratarum item solidarum & cubicarũ quædam affectiones numeris explicentur, non tamen omnes explicantur. Neque enim quadratum vel cubum arithmetica duplicare potest, quod utrumque tamen geo-

men geometria profitetur. Neque vero geometriæ corpus suis membris constabit, si præcepta de planis & solidis numeris ad arithmeticam referantur, & absurdum fuerit species figuræ in arithmetica præcedere, genera in geometria sequi. Denique usus geometricus disceptator & judex controversiæ hujus esto, quem in figuratis numeris extra geometricas figuras, nullum deprehendes, & talis arithmetica quædam consequentibus artibus specialis accommodata est in sonis, in astris: ut arithmetica hic geometrica, illic musica, istic astronomica dici possit, absolute arithmetica nequaquam, quæque extra geometriam, musicam, astronomiam inutilis esset futura. De planis itaque & solidis numeris tanquam planarum & solidarum figurarũ adjunctis umbris in geometria suo loco præcipiendum fuit, & iis numeris utendum quoties magnitudines numeri fient, ut vere Aristoteles monuit, nec heterogenia hic erit, cum superioris & altioris doctrinæ usus in subalterna & inferiore doctrina adhibebitur.

10. *Figuræ Isoperimetræ sunt figuræ æqualis perimetri.*

Affectiones unius figuræ adhuc fuerunt in ordinatione, primatũ, ratione, sequitur duarum figurarum comparatio in ratione, proportione, similitudine. Qua si nihil in geometricis rebus præstantius esse dixero, nihil à veritate (opinor) aberrabo. Axiomata enim sequentia maximam in geometria partem complectuntur, primaque sunt sui quodque generis & antiquissima. Itaque postulanda & exemplis illustranda sunt, ratio est in Isoperimetris. Sic triangulum perimetri 16 pedum est Isoperimetrũ triangulo 16 pedum, quadrato 16 pedum, & circulo 16 pedum: nec isoperimetria homogeniam figurarum requirit, sed tãtum æqualem ambitum: unde manifestus est error mathematicorum qui figuras isoperimetras definiunt, quæ intra eundem orbem inscriptæ sunt, vel quarũ anguli eundem ambitum capiunt, cum æqualis & inæqualis perimetri figuræ in eũdem orbem inscribi possunt, & triangulum quadratumque eidem circulo inscripta capiunt illud tribus, hoc quatuor angulis eundem ambitum: neq; tamen sunt isoperimetra, & circuli ipsi inter se ad talem definitionem nũquam essent isoperimetri. Definitio illa fuit Omnisancti in Cusani Cardinalis mathesin interpretis, quo errore imbuti postea multi ψευδογραφίαν latissime propagarunt.

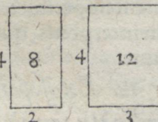
11. *Ex isoperimetris homogeneis ordinatius est majus, ex heterogeneis ordinatis terminatius.*

Geometricum axioma de ratione figurarum ex isoperimetria, Theon primo magnæ constructionis repetit à Zenodoro. Idem tractatũ plenius est à Pappo quinto libro: & à Proclo propositum in Timæum Platonis: & ad 4 & 27 p 1: Archimedis etiam scripta quædam de isoperimetris prædicantur. Ordinatius vero in theoremate intelligatur etiam pro minus inordinato. Sic triangulum æquilaterum erit majus isoperimetro inæquilatero, & æquicrurum vario. sic in quadrangulis quadratum majus non quadrato. sic oblongum ordinatius est majus minus ordinato oblongo. Sic ex heterogeneis ordinatis quadratũ ma-

jus triangulo, & circulus quadrato, quia quadratum est πολυπλευρώτερον, & pluribus terminis constat quam triangulum, & circulus quam quadratum. Sic in solidis icosaedrum majus est dodecaedro. Zenodorus in planis πολυγωνιώτερον seu πολυπλευρώτερον quod in planis idem est: Pappus in solidis πολυεδρώτερον majus efficit, quod in solidis non sit idem quod πολυγωνιώτερον. Ratio isoperimetrorum ea est, ex cujus ignoratione ψευδογραφίαι infiniti per omnes humanæ vitæ partes erroris orta est, Isoperimetra esse æqualia. Hinc enim geodesia in agrorū dimensionibus fraudulenta, hinc geographia in regionibus & insulis mendax & mendosa, cum geographi metiuntur insulas numero dierum, quibus circūeuntur & circumnavigantur. Metire isoperimetris mensuris altera cylindracea, altera cubica frumentum, longe inæqualem capacitatem reperies. sed summa figurarum capacitas & perfectio in isoperimetris ita summatim concludatur.

12. *Si figuræ primæ sunt æquealtæ, sunt ut bases: & contra.*

Ex elementis geometricarum comparationum primū fuit in ratione isoperimetrarum figurarum: secundum sequitur in proportione primarum figurarū, aurea vere, si illud primum argenteum fuerit. Proportio numerorum geometrica dicitur in arithmeticis regulis, aurea regula: Hæc vero proportio figurarū in geometricis figuris longe amplissima materia laudis aurea quoq; possit appellari: pertinet enim non ad primas solum, sed argumento proportionis ad primarum multiplices. Hoc igitur aurum quanto abundantius, tanto cupidius & avidius excipiendum. Proportio primarum figurarum hic duplex est, prima est directa in æquealtis. Hoc directum proportionis geometricæ in primis aurum ex arithmetica lege directæ proportionis derivatum est, non est tamen rationale, nec explicabile numero in primis ipsis figuris, sed tantum in earum quibusdam æquemultiplicibus, quæ suis simplicibus sunt proportionales. E logico proportionis axiomate æquemajorum patuit in arithmeticis. Si numerus numeros multiplicet, facti erunt proportionales multiplicatis. Itaque æquealtarū vis explicabilis est in figuris rationalibus. Ut in duobus parallelogrammis rectangulis eadem altitudo 4 duas bases 2 & 3 multiplicet: facta parallelogramma 8 & 12 sunt proportionalia basibus 2.3. Itaque ut 2 ad 3, sic 8 ad 12: Idem erit postea in rectis prismatis & cylindris. In planis parallelogramma sunt duplicia triangulorum: in solidis prismata sunt triplicia pyramidum, cylindri triplices conorum. Hæc (inquam) caussa propositi axiomatis sic numero explicari potest in multiplis: quæ tamen antiquior in primis figuris, triangulis pyramidibus, conis est, quam in triangulatis, pyramidatis, conicatis, quamvis numero explicari non possit.



Hoc axioma prædicandæ per universam geometriam fœcunditatis est: Hinc enim propositiones in elemētis novēdecim oriuntur 35.36.37.38.39.40.41 p 1: 1 p 6.25.29.30.31.32 p 11: 4.5.6.11.13.14 p 12, præter rotundas figuras, ut circulos & sphæras, in quibus veritas est eadem, si diameter pro basi intelligatur, ut 2 & 18 p 12 Euclides intelligit: item præter innumerabilia consectaria, quæ per universam

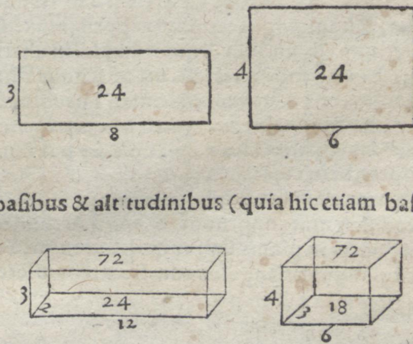
universam geometriam é 1 p 6 ducuntur. Hæc (inquam) aurea geometria tam copiosa ex altera primarum figurarum proportione nobis erit, unde nihil intuendo spatia figurarum, attamen é solis basibus ratio ipsarum æqualitasque vel inæqualitas poterit explicari. Conversio autem protinus patet, figuræ primæ ut bases sunt æquealtæ, nempe cũ facti sunt proportionales multiplicatis, numerus idem multiplicavit. Itaque

Si sunt in basi æquali, sunt æquales.

Sic triangula, sic parallelogramma, quæ est 35.36.37.38 p 1, quo possunt etiam referri 39 & 40 p 1. Sic cæteræ figuræ propositæ in æquali basi æquantur.

13. *Si figuræ primæ sunt reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales: & contra.*

Sed jam proportionis geometricæ alterum aurum dicatur in reciprocatione, prius enim fuit in directa proportione, & hæc ex arithmeticis aurea regula est proportionis reciprocæ, sed figuris primis accomodata. Euclides altitudinum & basium proportionem reciprocationi subjecit, & 2 d 6 reciprocationem figuris tanquam propriam attribuit, & figuras reciprocas ait esse, quando in utraque figura sunt antecedentes & consequentes termini, id est quando rationum termini in utraque figura reciprocantur: sitq; ut primus terminus primæ ad primam secundæ, sic secundus secundæ ad secundum primæ. Verum reciprocatio res arithmetica est omnino, ut in arithmetica nostra docuimus. Atque hic consumptæ sunt 14.15 p 6, 34 p 11, 9.15 p 12. Reciprocatio rationalis & explicabilis est numero non in figuris primis, sed in æquemultiplicibus primarum: ut jam prædictum in directa proportione. ut sunto rectãgula parallelogramma duo, inæqualia basibus & altitudinibus 3. 8. 4. 6. ut hic vides. Proportio reciproca est ut basis 3 ad basin 4, sic altitudo 6 ad altitudinem 8: & parallelogramma ipsa sunt æqualia, nempe 24 & 24: Sunto solida duo inæqualibus item basibus & altitudinibus (quia hic etiam basis est pro lõgitudine & latitudine) 12.2.3.6.3.4. solida ipsa erunt 72 & 72, ut hic vides, & proportio itẽ reciproca est basium & altitudinũ: ut enim 24 ad 18, sic 4 ad 3. Et causa est ex ipsa aurea proportionis in arithmeticis lege, quia bis bina latera sunt proportionalia, ideoque factæ ab iis areæ sunt æquales. Et vicissim ex eadem lege, quia areæ sunt æquales, termini quatuor sunt proportionales, quæ conversio est præsentis axiomatis.



14. *Figuræ similes sunt figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum.*

Geometricum aurum in figuris primis tum æquealtis tum altitudine & basi reciprocis expositum est, superest in similibus omnium purissimum & pretiosissimum aurum. Primo similes figuræ definiuntur, deinde comparantur. Similitudo figurarum est, non primarum modo & á primis multiplicium, sed omnino omnium, & duabus rebus comprehenditur æqualitate angulorum & proportione crurum: & duæ figuræ dicuntur similes tali synecdoche particulariũ & angulorum æqualium & crurum proportionalium, qua figura rationalis dicta est ratione laterum rationalium. Neque duo termini ut duæ figuræ similitudinem faciunt, ut neque illic unicus terminus ut unica figura rationem facit. Verum definitio similitudinis in figuris magnam geometris anxietatẽ attulit, ut in unoquoque figuræ genere nova similitudinis definitio facta sit: 21 d 7 de figuratis numeris similibus: ut 1 d 6 de similibus rectilineis, 10 d 3 de sectionibus similibus, 7 d 11 de similibus inclinatiõibus, 9 d 11 de similibus solidis, 24 d 11 de conis & cylindris similibus: Hinc etiam novæ definitiones de segmentis conicis similibus apud Apollonium, de similibus sphæroidibus apud Archimedem, de quibus in scholis. Circuli autem & sphæræ similes intelligentur ex illa polygonia infinitorum laterum, ut suo loco de singulis intelligetur. Itaque

1. *Habent homologos terminos æqualibus angulis subtensos, & æquales, si ipsæ sint æquales.*

Consectarium est é proxima generali definitione in recti terminis præcipuũ: & ita sumitur á Theone ad 4.5.6 p 6 in rectilineis, sed nos generale etiam fecimus, & homologos terminos appellamus é sumptis proportionalibus, primũ & tertium, secundum & quartum, id est alternos: Homologia enim & ἐναλλὰξ 11 & 12 d 5 eadem res est, uti in scholis illius loci docuimus. Pars ultima de æqualitate terminorum est lemma Theonis ad 22 p 6. Et

2. *Similiter sitæ sunt, quando termini proportionales simili situ respondent.*

Euclides appellat 18.26.27.31 p 6, 27 p 11 similiter sitas figuras, vel similiter descriptas, ut in cõsectariis 19 & 20 p 6, & 22 p 6, & 37 p 11, neque definit, sed res tamen ea est in situ simili, cum nempe supera superis, infera inferis, & reliquæ loci differentiæ congruunt: & apud Archimedem in Isorropicis 9 axi, similiter sita puncta in planis similibus definiuntur, á quibus ad æquales angulos rectę faciunt æquales angulos cum homologis lateribus: situs ille similis necessario exigitur ad 26 & 27 p 6. Et

3. *Similes eidem sunt, similes inter se.*

Euclides speciale id fecit de rectilineis similibus 21 p 6. Patet aũt protinus ex ipsa definitione similium. similitudo enim duarum figurarum ad eandem concludit & æqualitatem in angulis, & laterum proportionem inter se. Et

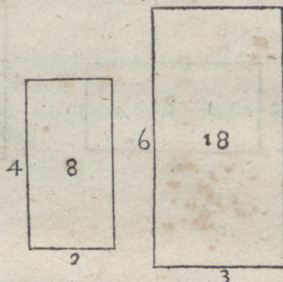
4. *Si partibus datæ figuræ partes ad datum terminum similes similiterque sitæ constituantur, figura constituetur similis datæ similiterque sita.*

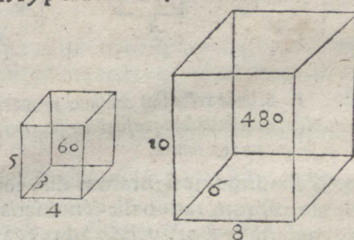
Hæc

Hæc fabrica specialiter proponitur ad 18 p 6, & 27 p 11.

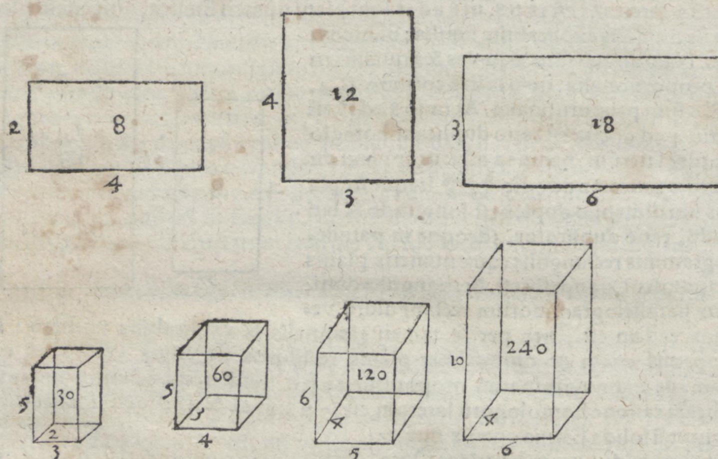
15. *Figuræ similes habent rationem homologorum laterum æquemultiplicatam dimensionibus, & medium proportionale una minus.*

Jam aurum sequitur illud (ut dixi) pretiosissimum, aurum tamen, ut in cæteris antea generalibus, ex parte tantum rationale & numerabile. figuræ vero planæ duarum sunt dimensionum, solidæ trium: Itaque habebunt illæ duplicatam rationem homologorum laterum, hæ triplicatam. Ratio in rationalibus primo manifestior erit. Numeri plani similes sunt in duplicata ratione homologorum laterum, est 18 p 8, ut 8 ad 18 sunt plani numeri similes, sunt etiam plana iis numeris explicabilia similia: ut hic vides. Nam anguli sunt æquales & æqualiũ crura proportionalia, quia latera eorum 2 & 4, 3 & 6 sunt proportionalia. At ratio 8 ad 18 est ratio 4 ad 9: quæ est ratio duplicata homologorum laterum, nempe 2 ad 3: ut apparet duplicata ratione 2 ad 3: sic $\frac{2}{3}\frac{2}{3}(\frac{4}{9}$ Itaque in planis ubi dimensio duplex est longitudo & latitudo, ratio duplicatur, ideoque in parallelogrammis rectangulis (quæ numeris planis respondent) ratio ista est. In triangulis dimidiis parallelogrammorum rectangulorũ veritas eadem est, nec per se tamen rationalis & explicabilis numero: in trapeziis etiam & quibuslibet planis rectilineis similibus veritas est eadem: ut etiam nominatim proponitur 20 p 6. solidi numeri similes sunt in triplicata ratione homologorũ laterum, est 19 p 8: ut 60 & 480 solidi similes sunt, sunt etiã solida similia quæ iis numeris cõprehẽduntur, ut hic vides. Quia latera ipsorum 4. 3. 5 & 8. 6. 10 sunt proportionalia. At ratio 60 ad 480 est ratio 4 ad 8 triplicata: sic $\frac{4}{8}\frac{4}{8}\frac{4}{8}(\frac{64}{512}$ id est 1 ad 8, seu octupla, quod offendes divisis 480 per 60. Itaque in solidis ubi dimensio triplex est, ratio triplicatur, ideoque in parallelopipedis rectangulis (quæ solidis numeris respondent) ratio ista est rationalis & explicabilis numero. In pyramidibus trientibus prismatum & ratio item eadem est, neque per se tamen rationalis vel explicabilis numero: In conis & cylindris similitudo, inde suo loco percipietur. Quare tertium hoc geometriæ proportionis in similibus figuris aurum per se relucet resplendetque, sed in suo generali & proprio lumine collocatum. Atque hinc apparet labor angorq; Euclidis & Theonis tot locis dispersas ejus micas





consectantiũ, 10 d 5, 5 d 19, 20, 23 p 6. 5, 18, 19 p 8, 33 p 11: 2, 8, 12, 18 p 12, de quib. in scholis. sed prima pars adhuc exposita sit, secunda brevius percipitur, quod habeant medium proportionale dimensionibus una minus. Nam inter duas similes figuras planas est una media proportionalis, inter duas solidas sunt duę. Euclidis de planis est 18 & 20 p 8: de solidis est 19 & 21 p 8. Caussaque tãtũ est arithmetica ut prius. Nam si duplicata ratio est numeri ad numerum, necesse est ex continuorum lege unum interesse proportionalem, cujus cum primo etiam sit illa duplicata ratio: si triplicata, necesse est duos interesse, ut hic vides.

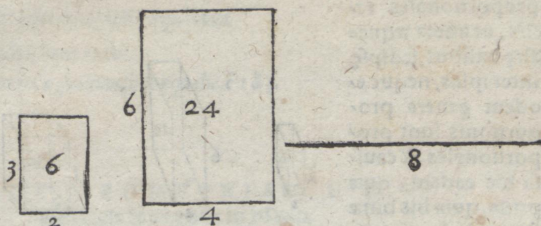


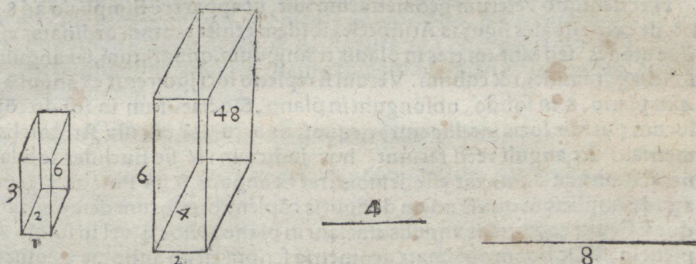
Itaque

1. Si lineæ rectæ sint continuè proportionales una plures dimensionibus figurarum similium ad primam secundamque similiter sitarum, ut prima recta est ad ultimam, sic prima figura est ad secundam: & contra.

E similitudine figurarum duo consectaria oriuntur ex parte tantum, ut axioma ipsorum, rationalia & numeris explicabilia. De triangulis & triangulatis consectaria sunt Euclidis ad 19 & 20 p 6. Si tres rectæ sint continuæ proportionales, erit ut prima ad tertiam, sic rectilineum comparatum primæ ad rectilineum comparatum secundæ simile similiterque situm, quod in numeris parte quadam potest intelligi: ut sunto tres lineæ pedum 2. 4. 8. & ad primam secundamque comparentur figuræ similes pedum 6 & 24: sic nempe ut 2 & 4 sint bases earum: Hic ut prima linea 2 est ad tertiam 8, sic prima figura 6 est ad secundam 24: ut hic vides. Sic res patet in planis de tribus continuis, & caussa mani-

sa manifesta est è proximo axiomate & duplicatione rationis in tertio. De pyramidibus & prismatis tale in elementis nominatim nihil est: de prismatis parallelopipedis cōsectariū est ad 33 p 11. Sunto rursus 4 lineæ continue proportionales 1.2.4.8. & duo similia solida comparentur ad primam & secundam: ad primam è lateribus 1.3.2. sit 6: ad secundam è lateribus 2.6.4 sit 48, ut prima linea 1 est ad quartum 8, sic prima figura 6 est ad secundam 48, ut constat divisione, exempla ita sunt.

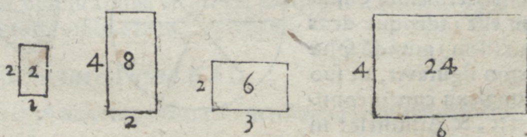




Atque in hoc consectario via patet cujuscunque datæ figuræ duplicandæ triplicandæ & data ratione augendæ. Nam ut prima recta erit ad ultimam, sic figura prima erit ad secundam.

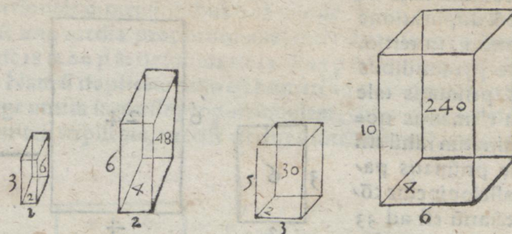
2. *Si quatuor rectæ sint proportionales, figuræ similes ad eas similiter sitæ sunt proportionales: & contra.*

Euclidis est 22 p 6 de omnibus rectilineis similibus, & 37 p 11 de parallelepipedis, unde generale institui consectarium potest, uti fecimus: proportio hic etiam ex parte potest explicari, neque tamen continua proportio hic exigitur, ut antea. Esto in planis primū exēplum. Caussa vero est proportionalium figurarū, quod bis binæ fi-



gura ha-

guræ habent eandem rationē duplicatam. Secundum exemplum esto. Neq; tamē hic figuræ sunt proportionales rectis, ut antea æquealtę basibus, sed ipsę inter ipsas, neque eodem genere proportionis sunt proportionales, & caussa hic eadem, quæ prius, quia bis binæ figuræ habent eandem rationem triplicatam.

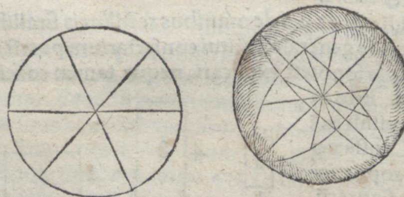


16. *Figuræ complentes locum sunt, quæ circa idem punctum quolibet modo collocatæ nihil inane relinquunt.*

Hæc definitio veterum geometrarum fuit, ut apparet ē Simplicio ad 8 cap 3 lib. de cælo: quales figuras Aristoteles ibidem censet tantum ordinatas esse, neque omnes: sed tantum tres in planis triangulum, quadratum, sexangulum: in solidis pyramidem & cubum. Verum si repletio loci judicetur ex angulis rectis 4 in plano, 8 in solido, oblongum in plano, & octaedrum in solido cōplebit locum (ut suis locis intelligetur) neque satis accurata erit ista Aristotelis geometria. At anguli recti faciunt hoc judicium: & sic Euclides solida ordinata quinque duntaxat esse demonstrat ex angulis, & ita Potamon geometra apud Simplicium quæstionem de figuris cōplentibus locum demonstrat: Denique si figuræ conjunctis angulis efficiant in plano rectos 4, vel in solido 8, complent locū. De hoc problemate geometria scripta est ab antiquis geometris, & ē recentibus Regiomontanus dicitur accurate commētatus esse, & Maurolycus librum pollicetur, quorum nihil dum videre nobis contigit.

17. *Figura rotunda est, cujus radii omnes æquantur.*

Talis erit in planis circulus, in solidis sphæra. Hæc vero figura est ex isoperimetris maxima, ut patuit 12 e. eaque de caussa Plato dixit in Timæo hoc σχῆμα τελειώτατον πάντων perfectissimū omnium esse: ideoque deus (ait idem) mundū sphæricum figuravit, ut suo complexu cuncta contineret, & Aristoteles in mechanicis, prob. ait hanc figuram omnium miraculorum esse principium & caussam.



caussam. Sed ea miracula suo tempore narrabuntur. Rotundum pro figura rotunda dicatur.

1. Diametri in rotundo bisecantur radiis æqualibus.

Quia nempe dimidia sunt radii.

2. Rotunda diametrorum æqualium sunt æqualia. é 1 d 3.

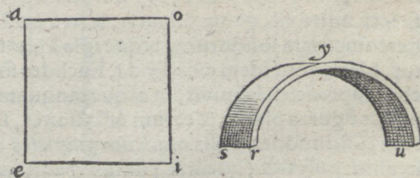
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. V.
de lineis & angulis in plano.

Lineatum est superficies aut corpus.

Lineati partitio manifestam intelligentiam habet é lineati definitione, qua excluditur linea, & comprehenditur superficies & corpus. Atque hinc orta est metricæ artis partitio in geometriā de superficie, & stereometriam de corpore, quomodo Plato 7 de rep. & Aristoteles 7 c 1 Post. geometriam & stereometriam distinguunt, attamen etiam geometriæ nomen ad totam metiendi artem significandum usurpatur.

2. Superficies est lineatum duntaxat latum. 5 d 1.

Ut hic *aeio* & *uysr.* superficiei definitio complectitur intervallum lineæ, longitudinem nempe, sed addit intervallum alterum, id est latitudinem. Itaque superficies definitur á quibusdam (ut Proclus ait) magnitudo duorum intervallorum. At duo intervalla non tam specialiter tamque proprie definiunt: ergo superficies magnitudo longa tātum & lata melius definietur.



Tales (inquit Apollonius) sunt super terram umbræ, quæ longe & late campos occupant: terram vero non ingrediuntur, nec crassitudinis quidquam habent. ἐπιφάνεια nomen hic significantius est græce, tanquam diceretur apparentia, quia magnitudinis nihil visibile sit nisi superficies.

3. Superficiei terminus est linea. 6 d 1.

Res manifesta est in planis: superficies enim trilatera terminatur tribus line-

is, quadrilatera quatuor, multilatera multis: circulus una: sphærica superficies integra, non videtur terminari linea: At si spectetur sphærica genesis in conversione semiperipheriæ, principium erit linea, item finis, nempe semiperipheria: & sicuti punctum non solum terminat actu lineam, sed potentia medium est, sic & linea superficiem terminat actu, & lineæ innumerabiles per totam superficiem accipi possunt. Superficies igitur creatur motu lineæ, ut linea motu puncti.

4. *Superficies est plana vel gibba.*

Differentia superficiei respondet differētiæ lineæ in rectitudine & obliquitate.

5. *Superficies plana est superficies, quæ æqualiter intra suos terminos interjacet. é 7 d 1.*

Ut vides in *a e i o*. Quod igitur linea recta in duas partes oppositas spectabat, superficies plana spectat in omnes usquequaque partes, ut superficies plana sit omnium superficierum intra eosdem terminos brevissima, & ejus media extremis officiant: denique æquatur intervallo intra duas lineas: potest etiam per unicam rectam explorari quoquó versus applicatam, ut Proclus hic innuit. Planum vero pro superficie plana usurpatur, ut antea rotundum pro figura rotunda, & geometria de planis stereometriæ solidorum opposita, & sic Proclus lib 1 cap 13 geometriam de planis à stereometria de solidis separat. Euclides vero quamvis definiendo superficiem faciat genus plani 5 & 7 d 1: attamen totis elementis nullam aliam superficiem instruxit, quam planam, & tres postremos liberos στοιχειώσεως inscripsit stereometriam solidorum, neque ipsa Platonis & Aristotelis sententiam sequitur. Ideoque ut idem ait ad 7 d 1, Euclides solam superficiem planam de speciebus superficiei definivit, in eaque tanquam in aliquo subjecto abaco contemplatur figuras planas & earum affectiones, sectiones, contactus, situs, angulorum cōstitutiones. Talis nimirum planicies antiquis geometris abacus ille fuit hyalini pulveris (quem & Tullius eruditum vocat) respersione coloratus: de quo Persii carmen:

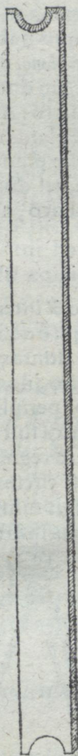
Nec qui abaco numeros & secto in pulvere metas
Scit risisse vafer.——

Atque hic Proclus phantasiam efficit, veluti planum quoddam speculum, in quod à cogitationibus rationum imagines influant. De superficie tamen gibba nonnihil suo loco præcipietur. *Itaque licet in plano*

1. *A' puncto ad punctum rectam ducere. 1 & 2 post 1.*

Tria deinceps postulantur, primum de linea recta. Linea recta & peripheria 2 lib. definitæ sunt, sed utriusq; fabrica in plano hic proprie dicitur. fabrica lineæ rectæ est 1 Post. & justum duntaxat in plano: neque enim licet in sphærico intra duo pun-

duo puncta rectam ducere, neque licet intra duo quælibet in conico & cylindraceo, á vertice enim ad basim tantum licet: & tum plani secantis conum & cylindrum terminus est. Ergo (ut dixi) de plana recta id tantum postulari juste posſit, ut á puncto quolibet ad punctum quodlibet recta ducatur, ut hic ab *a* in *e*. Ducendæ vero rectæ in plano geometricum instrumentū dicitur Amusſis, Ptolemæo 2 cap. 1 musicæ regula, quale hic vides: á puncto autem ad punctum juste postulatur, non ad puncta: neque enim puncta omnia in rectam cadunt, sed in obliquam pleraque. Et in sphæra, cono, cylindro, regula intra duo pūcta posſit esse, sed sphęrica, conica, cylindracea. Quin exemplo rectæ postulat Vitellio 2 p 1 intra duas lineas superficiem extendi: & sic videatur in elemētis de figuris plerisque planis solidisque postulari: ut figura describatur ad 7 & 8 p 2: item figura cōpleatur ad 8.14.16.23.28 p 6, quæ sunt de planis, itē ad 25.31.33.34 36.40 p 11, quę sunt de solidis: sed tamē superficies plana, & corpus planū rectitudinē suā metiūtur linea recta, ut jus postulādi in linea recta plana primariū videatur. Cōtinuatio aūt rectę lineę nihil aliud postulat, quā prolōgationē jā ductæ rectæ, & quidē á pūcto ad pūctū, ut rectā *ae* licet continuare in *i*. Quare primum & secundum postulatum Euclidis in unum conveniunt. Et



2. Rectā ponere ad datum punctū æqualem datæ, & á majore secare æqualem minori. 2.3 p 1

Ut data ſit *ae*, & ad punctum *i* ponatur æqualis *io*: item ſit *ae* maior quã *io*, & ſecetur congruente regula æquãte minorem *au*, ut hic. Nam ſi quis mente tantum id fieri putet oportere, is etiam regulam mente complectatur, ut regulæ opera faciat, neque vero fabrica æquandæ & æqualis amputandæ lineæ difficilior eſt, quam dato puncto & intervallo peripheriæ deſcribendæ, quam datis triangulo, parallelogrammo, ſemicirculo deſcribendi conum, cylindrum, ſphæram, quæ tamen omnia Euclides in principiis habuit.

Itaque

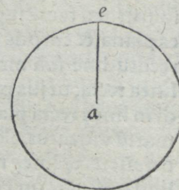
Recta una duæque interſectæ ſunt in eodem plano. é 1 & 2 p 11.

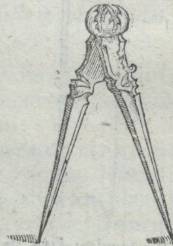
Recta una poteſt eſſe communis ſectio duorum planorum, tota tamen in plano eodem eſt una & tota in eodem altero: Atque ita tota eſt in eodem. Duæ rectæ interſectæ poſſunt eſſe in duobus planis interſectis, ſed planum per eas duci poteſt. Itaque ambæ erunt in eodem plano: & planum hoc geometricé concipiendum, quod lineæ obliquæ uni, vel duabus interſectis non ſemper idem ſubjicitur, cum peripheria ſit in ſphærico, nec omnes interſectæ peripheriæ in uno plano eſſe poſſunt.

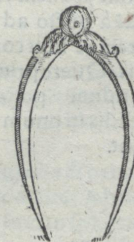
Et

3 *Data recta peripheriam deſcribere.*

Hæc fabrica eſt é 3 Poſt. Dato centro & intervallo circulum deſcribere. Sed hic terminus circuli tantum quæritur, qui é definitione peripheriæ melius ducitur & in plano duntaxat iſta rectæ converſio fieri poteſt, non in ſphærico, non in conico, non in cylindraceo, niſi á vertice ubi peripheria tamen eſſe poteſt. Itaq; antea generalis fabrica fuit peripheriæ, hic autem tantum planę, ut hic. Ut vero regula fuit inſtrumentum ducendæ rectæ, ſic modo eſt circinus peripheriæ deſcribẽdæ, cruribus rectis an valgis nihil intereſt, ut hic vides. Circinus vero é geometricis inſtrumentis inſtrumentum longe præſtantiſsimum eſt, cujuſque machinatione nobiles geometræ prodiderunt omnia geometriæ problemata confici poſſe: & extat Ioan Baptiſtæ liber, quod una circini apertura omnia Euclidis problemata reſoluantur: & Cardanus mathematicus







insignis

insignis lib. 15 subtilitatum scribit á se & á Ferrario inventam circini opera omnium ab Euclide demonstratorum demonstrationem. Talus Dædali ex sorore nepos hoc instrumentum invenisse dicitur 8 Metamorph.

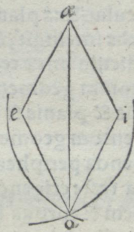
—Et ex uno duo ferrea brachia nodo
Iunxit, ut æquali spatio distantibus ipsis
Altera pars staret, pars altera duceret orbem. Itaque

Radii ejusdem vel æquales peripheriæ sunt æquales.

Quia eadem recta est ubique conversa. Atqui hic radius peripheriæ pro radio figuræ peripheria comprehensæ intelligatur.

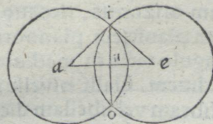
6. *Si duæ æquales peripheriæ á terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei ante concurrant; recta á concursu ad verticem bisecabit angulum. 9 p 1.*

Adhuc de lineis planis, sequitur ipsarum affectio, primum in anguli bisectione. Esto igitur datus angulus rectilineis æqualiũ crurũ *a e, a i,* & duæ peripheriæ æquales ab *e* & *i* terminis crurum ante angulum concurrant in *o*, rectaque ducatur ab *o* in *a*, dico datum angulum bisecari: ductis enim rectis *o e, o i*, anguli *o a e* & *o a i* æquicruri ex thesi & ex communi latere æquantur basi, *e o* & *i o*, per c 3 Post. quia sunt radii æqualium peripheriarum. Itaque per 1 c 6 e 3 anguli *o a e* & *o a i* æquantur, & ideo angulus totus est bisectus.



7. *Si duæ peripheriæ æquales á terminis datæ rectæ utrinque concurrant, recta per concursus bisecabit datam. 10 p 1.*

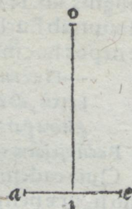
Esto data *a e*, & peripheriæ æquales á terminis *a* & *e* concurrant in *i* & *o*, & ducatur recta *i o*, dico á ducta bisecari datam *a e*, quia ductis radiis æqualium peripheriarum *i a* & *i e* bisecat per præcedẽtem angulum *a i e*. Itaque *a i u* & *u i e* æquales & æquicruri, cum crura sint æqualium peripheriarum æquantur basi, *a u*, & *u e*, per 1 c 6 e 3. Quare cum partes *a u* & *u e* sint æquales, data *a e* est bisecta.

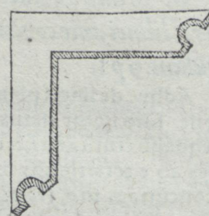


8. *Si recta in rectam perpendicularis insistit, facit angulos deinceps rectos: & contra.*

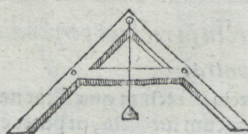
Insistit recta in rectam quæ secat nec secatur: & anguli sunt deinceps quos insistens efficit cum subjecta, ut patet é Proclo ad 15 p 1. ut hic *a e* intersecta, & *i*

insistens sunto perpendiculares, anguli deinceps aio & eio recti erunt per 7 e 3. Perpendiculum vero commune est omnium linearum. Attamen præcipue in planis rectis animadvertitur, & hic idcirco attentius consideretur. Hinc enim postea é communi definitione deprehenditur in cæteris magnitudinibus: sic recta judicatur perpẽdicularis peripheriæ, quãdo est perpẽdicularis rectæ per cõmunẽ sectionẽ trãseunti: sic duæ peripheriȩ judicãtur interse, perpẽdiculares: sic postea linea recta perpẽdicularis plano, & planũ plano perpẽdiculare dicet, 3. 4 d 11, & á Vitelliõe ad 5 d 1: sic rectarũ linearũ perpẽdiculo corpora ipsa inter se perpẽdicularia judicãtur. Quod Tullius in epistola ad frat. 3 lib. diserte significavit. Columnas (ait) neq; rectas, neq; é regione Diphilus collocarat, eas scilicet demolietur, & aliquando perpendiculo & regula discet uti Hic orator columnas rectas pro perpendicularibus plano horizontis, & é regione pro parallelis intelligit, & rectitudinem columnarum perpendiculo lineæ rectæ expendit. Atqui perpendiculi per totam geometriam utilitas immensa erit in rectangulis & planis & solidis. Regula primum fuit instrumentum geometræ in dirigendis lineis, circinus secundum in descrbenda peripheria. Norma vero est tertium instrumẽtũ in linea recta recte erigenda in eodem plano super rectam, atque inde superficiem & corpus supersuperficiem corpusve. Norma igitur sic est. Perpendiculum vero é plumbo & filo architectis physicumest, quia gravia suo pondere rectis lineis ad perpendiculum ferantur, quod á Theone primo magnæ cõstructionis demonstratur. Instrumentum duplex ita est. Primum ad explorandum perpendiculum sublime, ut utrum columna vel structura quævis recta sit ad planum orizontis, necquoquam acclinet. Secundum est ad expuerojdum planiciem planoorizontis parallelam. Itaque cum filum ab angulo recto in medium basis inciderit, indicabit libram longitudinem. Galli nivellum, Itali livellum, item achipendulum, Latini libram vel libellam dicunt.





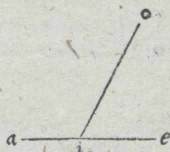


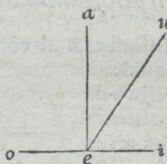


Itaque
1. Si recta

1. *Si recta insistit in rectam, æquat deinceps angulos duobus rectis: & contra.* e 13 & 14 p 1.

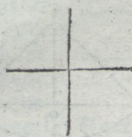
Nam duo tales anguli cum duobus rectis eundem locum occupant: si insistens sit perpendicularis, faciet rectos: si obliqua obliquos, ut hic *aio* & *eio* eundem cũ duobus rectis locum occupant. Conversio per impossibile cogitur, quia pars æquaretur toti. Esto igitur insistens *ae*, quæ æquet duos deinceps angulos *aeo* & *aei* duobus rectis: dico *oe* & *ei* unam esse rectam. Secus cõtinuet. *oe* in *u* per 1 c 5 e. Iã per 1 c 8 e, *aeo* & *aeu* æquãtur duobus rectis, quibus item æquantur *oea* & *aei* ex thesi: tollatur communis *oea*, relinquetur *aeu* æqualis *aei*, pars toti. Hinc constat duas rectas *oe* & *ei* unam esse & continuam rectam. Et

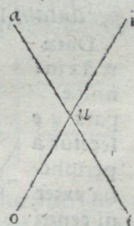




2. *Si duæ rectæ intersecantur, æquant angulos ad verticem, & omnes quatuor rectis.* 15 p 1.

Anguli ad verticem seu verticales dicuntur, qui in eodem puncto vertices oppositos habent. Demonstratio autem est: quia intersectæ vel sunt perpendiculares, & recti æquantur, ut hic: vel sunt obliquæ, tũque verticales etiam æquantur, ut *aui* & *oue*: item *auo* & *iue*, æquales vero sunt *aui* & *oue*, quia per 1 c 8 e cum cõmuni *auo* æquantur duobus rectis: ideoque etiam inter se. Quare detracto illo communi relinquuntur æquales. Addit huc Proclus Euclidis corollarium á Theone prætermissum, angulos duarum intersectarum æquari quatuor rectis, ex eoq; corollario ait inventum esse admirabile á Pythagoreis theorema, ordinatis figuris cõpleri locũ planũ triangulo, quadrãgulo, sexangulo: solidum tetraedro, & hexaedro: de qua Aristotelis geometria prædictum est. Sed de singulis suo loco dicetur subtilius. Potuit etiam Proclus huc addere, Quotlibet in communi puncto intersectarum angulos æquari quatuor rectis, quia cum quatuor rectis eundem locum occupant. Et

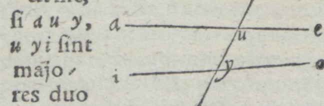




3. Si rectis

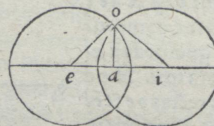
3. *Si rectis recta sectis interiores eadem parte anguli sunt majores duobus rectis, oppositi minores sunt.*

Ut hic, si *a u y*, *u y i* sint majores duobus rectis, *e u y*, *u y o*, erunt minores.



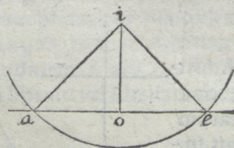
9. *Si á dato datæ rectæ infinitæ puncto duæ partes utrinque secentur æquales, & á punctis sectionum duæ æquales peripheriæ concurrant, recta á dato puncto in concursum erit perpendicularis super datam.* II p I.

Vt esto punctum *a* datæ rectæ infinitæ, & ab eo utrinque secentur per 2 c 5 e *a e* & *a i*, tum duæ peripheriæ æquales á punctis *e* & *i* concurrant, ut in *o*, recta á dato puncto *a* in concursum *o* erit perpendicularis super datam, quia ductis rectis *o e* & *o i* anguli *e a o* & *i a o* utrinque æquicruri per fabricam é segmentis utrinque æqualibus & communi latere æquantur basi, per 3 c 5 e: & ideo æquantur per 1 c 6 e 3. Itaque *a o* cum æqualiter interjaceat, per 10 e 2 est perpendicularis.



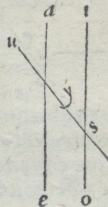
10. *Si pars datæ rectæ infinitæ secetur á peripheria á dato extra puncto, recta á dicto puncto bisecans dictam partem erit perpendicularis super datam.* 12 p I

Datæ rectæ infinitæ pars *a e* secetur á peripheria externi centri *i*, & recta *i o* bisecet dictam partem, dico *i o* esse perpendicularem: interjacet enim æqualibus angulis *a o i* & *e o i* eadem de caussa, qua demonstratur perpendiculum superius. Atque hæc de perpendiculo rectarum planarum: sequitur de parallelismo.



II. *Si duæ*

11. *Si duæ rectæ in eodem plano nusquam concurrunt, sunt parallelæ. é 35 d 1.*



Id Euclides. Juste postulavit. Tũ enim perpetuo æquidistabunt. Ut hic *ae*, *io*.

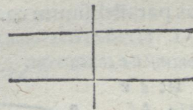
Itaque

Si recta infinita secat alteram é rectis parallelis infinitis, secabit reliquam.

Ut in eodem exemplo *uy* secans *ae* secabit etiam *io*: secus si non secaret, esset ad eam parallela, per 11 e. Ideoque & ad primam per c 11 e 2. Idque contra thesin: Proclus ad 29 p 1 deducit hoc consectarium ex Aristotele 1 lib. de cælo.

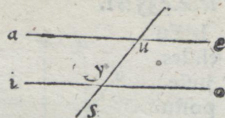
12. *Si rectæ recta sectæ sunt parallelæ, æquant angulos interiores eadem parte duobus rectis, & inter se alternos, & exteriorem interiori opposito: & contra. 29.28.27 p 1.*

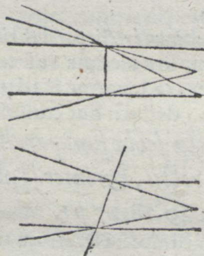
Parallelismus rectarum recta sectarum triplicem angulorum æqualitatem concludit, & ab earum qualibet vicissim concluditur. Primi anguli suis verbis satis explicantur: alterni autem verbum hic est situs (ait Proclus) quod in arithmeticis est proportionis, cum antecedens antecedenti comparatur, metaphora tamen respondet. Ut enim acutus est ad suum deinceps obtusum: sic in altera parte acutus est ad suum deinceps obtusum. Itaque alterne ut acutus ad acutum, sic obtusus ad obtusum. Exterior autem interiorque oppositi sunt, quorum alter est extra parallelas, alter intus eadem parte non deinceps, sed super eandem rectam tertius ab exteriore. Proprietatis hujus triplicis caussa est é perpendiculo, quod incidens in parallelas omnem hanc varietatem ostendit: Ut hic recti sunt interiores eadẽ parte: item alterni, item exterior & interior, ideoque



æquantur & interiores duobus rectis, & alterni inter se, & exterior interiori opposito. Quod si secans obliqua sit, parallelis idẽ ex cõtrario accidet. Obliquatione enim ista, manẽtib. rectis & immutatis, pariter tum interiorũ alter *euy* obtũditur, alter *uyo* acuitur: tũ alterni acuũtur & obtundũtur: tũ exterior interiorque oppositi pariter obtũduntur & acuuntur. si quis tamen interiores inæquales duobus rectis dicat, eodem argumento utraque parte & majores duobus rectis & minores dixerit (ait apud Proclum Ptolemæus) ut in rectis parallelis

ae & io sectis, recta uy, si dicas auy & iyu majores duobus rectis, anguli deinceps per 3 c 8 e erunt minores, qui tamen iidem eodẽ contradicentis proposito etiam majores essent. Idem erit impossibile, si minores duobus rectis dicantur. secunda pars & tertia è prima concludi possunt. secũda sic. Bis bini anguli æquantur duobus rectis oyu & euy per superiorem partem: item auy & euy per 1 c 8 e. Itaque æquantur inter se: tollatur communis angulus euy ab æqualibus, reliqui alterni ad a & y æquales relinquentur. Tertia sic. Anguli euy & oys æquantur eidem uyi per secũdam proprietatem & per 2 c 8 e. Itaque æquantur inter se. Conversæ prima pars hic item clarior est ex illa communis perpendiculi luce: Ac si cui interioribus angulis æquantibus duos rectos rectæ tamen concurrere videantur, ut si ipsi æquales sint recti, ut hic, necesse esset duas rectas communi perpendiculo divisas altera parte acclinare, altera declinare, vel saltem alteram, contra 10 e 2. Si obliqui sint, ut hic, lineis inter se obliquatis anguli minuentur altera parte, altera augebuntur. Itaque æquales duobus rectis non essent, contra thesim. Hinc secunda pars & tertia concludi possunt. secũda sic. Anguli alterni ad y & u æquantur dictis interioribus per 1 c 8 e, quia utrique æquantur duobus rectis: Atque ita per primam partem secunda concluditur. Tertia similiter per secundam, quia exterior oys æquatur opposito ad verticem per 2 c 8 e. Itaque cũ exterior & interior oppositi æquentur, alterni quoque æquantur. Quare ut parallelismus triplicem angulorum æqualitatem, sic triplex angulorum æqualitas parallelismum coarguit.

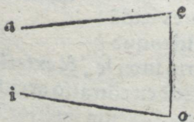




Itaque

1. *Si rectæ recta connexæ faciunt interiores angulos eadem parte minores duobus rectis, eodẽ continuatæ concurrent.*

Ut *ae* & *io*. Assumptio & cõplexio est ad 12 e de rectis in eodem plano. Si rectæ recta sectæ sunt parallelæ, faciunt angulos interiores, eadem parte æquales duobus rectis. Ergo si non faciunt æquales, sed minores, non erunt parallelæ, sed concurrent. De hoc consectario erit in scholis, ut Euclidem, Ptolemæum, Geminum exercuerit.



Et

2. Recta

2. *Recta connectens rectas parallelas est in earum plano. 7 p 11.*

Vt hic *uy* connectens parallelas *ae* & *io*. Postulatur ab Euclide 35 d 1, quod parallelæ sunt in eodem plano: & quod eas connectens sit in ipsarum plano, patet per 2 c 5 e. Et

3. *Si recta á dato puncto cum data faciat angulum, anguli facto æquati & alterni crus alterũ erit parallelum datæ rectæ. 31 p 1.*

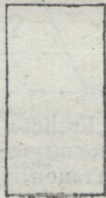
Ut data sit *ae* & punctum *i* á quo recta sit *io* faciens cum data angulum *ioe*, cui ad *i* æquetur alternus *oiu*, recta (quæ est crus alterum) est parallela datæ. potest vero æquari angulus per primam proprietatem, & sic vulgo architecti erecto perpendiculo æquant: potest item per exteriorem simillime. Et

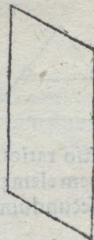
4. *Anguli crurum alterné parallelarum sunt æquales.*

Consectariũ est é tertia proprietate: unde Euclides fecit 10 p 11, ut hic vides altero interioris crure continuato. Et

5. *Si parallelæ conterminent parallelas, oppositæ æquantur. é 34 p 1.*

Alioqui parallelæ non essent. Quod é perpendiculis connectentibus intelligitur, quæ ex definitione sunt æqualia inter parallelas, & si é perpendicularibus fiant obliquæ, manebunt æquales mutatis angulis. Et

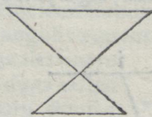




6. *Si rectæ conterminent eadem parte æquales & parallelas, sunt æquales & parallelæ.* 33 p 1.

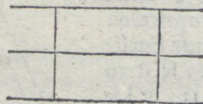
Potuit vero elementum concludi é proximo, addici tamen etiam potest ex antecedẽtibus: ut *a e* & *i o* æquales parallelæ cõterminẽtur, ab *a i* & *e o*, & ducat̃ *e i*. Hic quia recta *e i* incidit in parallelas *a e* & *i o*, anguli alterni *a e i* & *e i o* æquãtur per 12 e, & æquant̃ crurib. *a e* & *i o* per thesin & *e i* cõmuni. Itaq; per 1 c 6 e 3 æquãtur basi *a i* & *e o*. Hoc primum est. Tum per 12 e, anguli alterni *e i a* & *i e o* æquãtur inter se, eosque faciunt rectæ *a i* & *e o* sectæ per rectã *e i*: sunt igitur parallelæ, quod erat secundum. Eadem vero parte dictum est, ne oppositis terminis, connexas rectas quispiam intelligeret, ut hic.

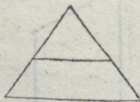


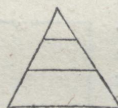


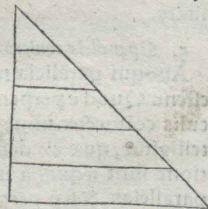
13. *Si lineæ rectæ parallelis pluribus rectis intersecantur, intersegmenta sunt proportionalia.* é 2 p 6 & 17 p 11.

Adhuc de perpendiculo & parallelismo planarum, rectarum proportio postrema est, cujus elementum veritatis suæ caussam ostendit ex ipso parallelismo, idque per omnes rationis species æqualitatis & inæqualitatis majoris minorisque. Nam si intersectæ sunt perpendiculares, segmẽta intra duas parallelas æquantur: Communia enim perpendicula parallelismum faciunt, ut antea jam patuit: ut hic. Quod si intersectæ annuant, non jam segmenta quidem illa bina æqualia sunt, sunt tamen proportionalia: quantoque major intersecta fuerit, tãto majora erũt ipsius intersegmenta, quanto minor tanto minora. tertia autem parallela in vertice nõ expressa tamẽ intelligatur.





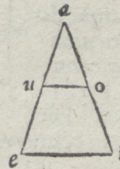


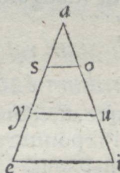


Hæc per species inductio rationum est Euclidi 1 33 p 6 demonstratio, ut in scholis dicetur. Est autem elementum hoc magnæ fœcunditatis: hinc enim est primum sectio lineæ secundum datam rationem, & inventio tertiæ & quartæ proportionalis.

1. *Si recta cum data faciens angulum secetur data ratione, parallelæ á segmentorum terminis in finem datæ & contingens in ea punctum secabunt datam data ratione.*

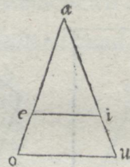
Consectarium est valde generale ad omnem datæ rectæ sectionem sive bifariam sive trifariam, sive quotlibetfariam, sive omnino ratione quamcunque dederis, secanda sit. Euclides ex hac materia fecit 9 & 10 p 6. Secãda sit primo data recta *a e* bifariam, rectaque cum data faciens angulum sit *a i* infinita, seceturque *a o*, & deinceps per 2 c 5 e æqualis assumatur *o i*, & ducantur per 3 c 12 e parallelæ à punctis *i* & *o* in e finẽ datę, & *u* contingens in ea punctum. Tertia autem parallela per verticem *a* intelligitur, neque ex primi necesse est. Itaque *a e* per 13 e bisecatur, & ut *a o* ad *o i*, sic *a u* ad *u e*. sed *a o* ad *o i* sunt dimidiæ partes. Itaque & *a u*, *u e* sunt etiam dimidiæ. Atque hic etiam 7 e comprehenditur non argumenti quidem sed effectus genere. At argumentum illud quidem brevius est, hoc autem est generalius. jam secetur *a i* in tres partes, quarum prima sit dimidia secundæ, secundaque tertiæ: & contermina datæ secetur una parte *a o*, tum ea duplicetur in *o u*, denique *u i* assumatur dupla ipsius *o u*, totumque diagramma tribus parallelis compleatur *i e*, *u y*, *o s*, quarta parallela ad verticem, ut dictum est, intelligetur. Itaque sectio erit in data, quæ facta est in contermina per 13 e, quia sunt inter parallelas intersegmenta.





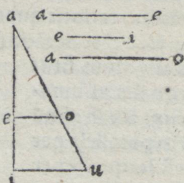
2. *Si duæ datæ rectæ facientes angulum continuentur, prima æqualiter secundæ, secunda infinite, parallelæ á terminis primæ continuationis in principium secundæ, & contingens in ea punctum intersecabunt tertiam proportionalem.* 11 p 6.

Sunto datæ rectæ facientes angulum *a e* & *a i*, & prima *a e* continuetur æqualiter ipsi *a i*, & ipsa *a i* continuetur infinite, tum parallelæ *e i* & *o u* à terminis primæ continuationis in *i* principium secundæ, & *u* contingens punctum in secunda, secant *i u* tertiam proportionalem. Nam per 13 e ut *a e* ad *e o* id est per fabricam ad *a i*, sic *a i* ad *i u*.



3. *Si é datis tribus rectis prima tertiaque facientes angulum continuentur, prima æqualiter secundæ, tertia infinite, parallelæ á terminis primæ continuationis in principium secundæ & contingens in ea punctum intersecabunt quartam proportionalem. 12 p 6.*

Sunto datæ prima a e secunda e i tertia a o, totumque diagramma cõpleatur ex præscripto. Hic per 13 e, ut a e est ad e i, sic a o ad o u.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. VI.
de triangulo.

Plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum, & unum proportionale medium. é 20 p 6, 11 & 18 p 8.

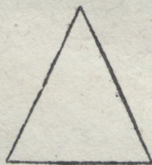
Adhuc de lineis planis earumque affectionibus actum est: sequitur de figuris planis earumque generibus. Præponitur autem commune consectarium é 15 e 4, quia dimensio duplex est in planis.

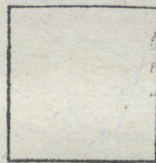
2. *Planum est rectilineum aut obliquilineum*

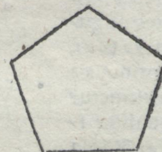
Rectitudinis vero & obliquitatis differentia lineæ fuit 4 e 2: unde nunc repetitur dichotomia plani é terminis rectis vel obliquis, & eadem caussa præponitur modo rectilineum, qua prius recta linea præposita est obliquæ.

3. *Rectilineum est planum, quod comprehenditur á lineis rectis.*

Hinc est 9 & 20 d 1, quod angulus planus rectilineus sit, qui comprehenditur á rectis lineis, quod figura rectilinea sit, quæ comprehenditur á lineis rectis, sed generale melius erit generaliter, ut in exemplis.



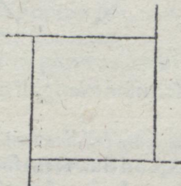
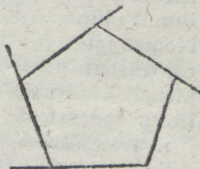




4. *Rectilineum æquat angulos rectis interiores quidem generatim á binario paribus, externos autem quaternis.*

Primum nempe genus rectilinei, id est triangulum æquat interiores duobus rectis, id est binario, primo pari rectorum: secundum id est quadrangulum secundo pari id est quaternario, tertium quinquangulum tertio, id est senario rectorum, & quartum quarto, quintum quinto, & sic deinceps rectilinei genera paribus rectorũ ita respondẽt: ut vides in hac arithmetica progressione pariũ

2.4.6.8.10.12
3.4.5.6.7.8

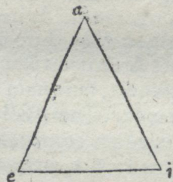
Externi tamen quolibet latere cõtinuato, rectorum quaternario semper æquantur. Itaq; geometria hæc singularis est & mysterii cujusdã plena, jam olim jactata in scholis geometrarũ. Proclus enim secundã partẽ de externis rectos quatuor æquantibus, sic affirmat 11 cap 1 lib. Quemadmodum (ait) etiam quatuor rectis æquales externos habere angulos, non triangulis modó, sed omnibus rectilineis inest. Item cap 7 lib 2. Quædam mutuo confirmantur. Nam & ex eo quod externi rectilineorum anguli quatuor sunt rectis æquales: interiorum rectis æqualium multitudo, & contra hoc ex illo demonstratur. Hæc ille. Ut autem ab externis probetur interiorum ratio, si Proclus ipse demonstrasset, hoc illi beneficium deberetur: ab interioribus vero per genera probatur de externis. Nam trianguli tres anguli æquantur duobus rectis, quadrãguli quatuor, quinquanguli sex, sexanguli octo, septanguli decem, atque ita deinceps á binario paribus, unde per 1 c 8 e 5 perpetuus externorum quaternarius concluditur.

5. *Rectilineum est triangulum aut triangulatum.*

Ut á linea lineatum, sic à triangulo triangulatum dicatur.

6. *Triangulum est quod comprehenditur á tribus lineis rectis.* 21 d 1.

Ut *aei*. Triangula figura definitur ab Euclide á tribus lateribus, unde & trilaterum tanquã ex caussa melius appellaretur quã triangulum ex effectis: præsertim cum

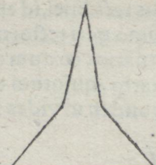


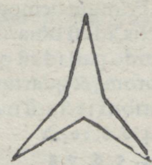
tres anguli cum tribus lateribus nequaquam reciprocentur. Triangulum enim potest esse quatuor laterum, ut ἀκιδοειδὲς velut cuspidatum: Zenodoru

id voca-

id vocabat κοιλογώνιον cavangulum, & potest quinque & sex esse laterum. Ut hic. Nomen igitur trilateri







plenius & justius esset, sed usus trianguli nomen accepit pro trilatero, & sane teneatur eodem sensu. *Itaque*

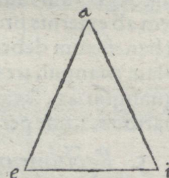
1. *Triangulum est prima figura rectilineorum.*

Euclides ax. 12 fecit, quod duæ rectæ superficiem non claudant: & Vitellio 4 postulato primi postulavit duabus superficiebus planis corpus non claudi: at negatio est ex opposito hujus elementi. trilaterum est prima figura rectilineorum: Ergo in figuris rectilineis nulla est bilatera, neque duæ rectæ figuram faciunt. Quid autem sit prima figura, patuit 7 e 4. *Et*

2. *Si recta infinita secat angulum, secat basin.* Vitell. 29 t 1.

7. *Trianguli duo quælibet latera sunt majora reliquo.*

Definitum est triangulum, sequitur ratio in lateribus & angulis trianguli. Prima ratio Euclidis est 20 p 1 de ratione laterum. Esto igitur triangulum *aei*: dico lateribus *ae* & *ei* brevius esse latus *ai*, quia per c 5 e 2 recta intra eosdem terminos est brevissima. Simillima propositio huic est 20 p 11, de qua erit in stereometria. Euclides hanc propositionem anxia hysterologia demonstrat, de qua in scholis. Itaque Epicureis materiam irridendi sui præbuit, ut ipsum cavillarentur, demonstrare quæ vel asinis manifesta essent.

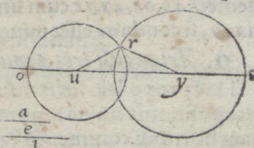


Esto enim (ajebat Sidonius Zeno) famelicus asinus in angulo *a*, pabulumque in opposito angulo *e*, asinus recta *ae* protinus ad pabulum accurret, neque duo latera peragrabit. Natura si quidem agit in omnibus secundum breviores lineas, ut Vitellio 5 p 5 exemplo aranearum & canum demonstrat, & cap 5 lib. 1 Halacenus idem prius dixerat de ponderibus deque luce, quæ non obliquis, sed rectis lineis feruntur: sed ante hos omnes Aristoteles & Euclides ipse idem senserant. Proclus tamen hic Euclidem defendit, tanquam scientificas rationes secutum, non sensum judicem, ut Epicureus. Tametsi Epicurea illa ratio non solum physica, sed geometriæ principiis etiam consentanea sit: rationem tamē judicem sequamur: ut é definitione lineæ rectæ, neque interea Euclidis elenchum faciamus. *Itaque*

1. *Si tres rectæ sint duæ quælibet majores reliqua, peripheriæque á terminis unius intervallis reliquarum concurrant, radii á concursu ad dictos terminos constituent triangulum.*

Euclidis

Euclidis est 22 p 1: ubi proponit constituere triangulum ex tribus rectis, quæ sint tribus datis æquales, & duæ quælibet secundum proximam trianguli legem majores reliqua. Problema igitur jubet ædificare triãgulum quodcumque optaveris. Optetur igitur triangulum é tribus rectis *a, e, i,* duabus quibusvis reliqua majoribus: & recta sit infinita, é qua tres secentur æquales datis *o u, u y, y s,* tum á terminis *y* & *u*, intervallis *o u* & *y s* peripheriæ concurrant in puncto *r*, radii ab eo concursu ad terminos *u* & *y* constituent triangulum *u r y*: radii enim illi æquabuntur rectis æquatis. per 3 c 5 e 5.



2. *Si duæ æquales peripheriæ á terminis datæ rectæ ejusque intervallo concurrant, rectæ á cõcursu ad dictos terminos constituent triangulum æquilaterum super datam. 1 p 1.*

Ut hic super *a e* constituitur triangulum *a e i*, & similiter institui possit fabrica æquicruri é communi radio non æquãte datã, & varii é tribus diversis radiis, quæ omnia in eadem figura hic proposita sunt: at specialia hæc in generali problemate continentur, neque novam ullam geometriam interpretantur.

8. *Si recta in triangulo est parallela basi, secat crura proportionaliter: & contra. 2 p 6.*

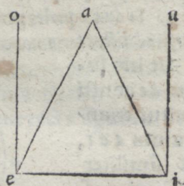
Ejusmodi igitur ratio est laterum in uno triangulo, sequitur proportio laterum: ut hic in triangulo *a e i* esto *o u* parallela basi, & intelligatur in *a* vertice tertia parallela. Itaque per 13 e 5 intersegmẽta sunt proportionalia. Conversa cogitur ex antecedente, quia to-



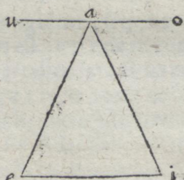
tum esset minus parte. Nam si parallela non sit *o u*, est *y u*, hic per thesin & antecedentem *a o*, *o e*, *a y*, *y e* cum sint proportionales, & prima *a o* sit minor quam tertia *a y*, secunda *o e* esset minor quarta *y e*, totum parte.

9. *Trianguli tres anguli sunt æquales duobus rectis* 32 p 1.

Hæc propositio locis infinitis Aristoteli proposita est, & videtur philosophus propositionis hujus argumento apodicticam analysin commentus esse, sed de tam horribili commento (quo tot ingenia tot seculis decepta sint) est in scholis & logicis & geometricis. Explicata igitur est hactenus, comparatio in trianguli lateribus, explicatur deinceps ratio in angulis, qui simul æquantur duobus rectis. Veritas autem hujus propositionis (ait Proclus) secundum communes notitias apparet duobus perpendiculis ad basin erectis: quantum enim inclinationis nutu imminuitur ex angulis rectis ad basin, tantum assumitur ad verticem, duorumque rectorum æqualitas ista compensatione cõstruitur: at hic in triangulo *a e i*, si perpendiculares *o e* & *u i* sensim inclines ad *a*, percipies in tertio angulo, *a* tantum assumi, quantum detrahitur de angulis *e* & *i*. Sic Aristoteles 9 cap 2 Phys. repetit caussam theorematis hujus ex angulo recto: concludi tamen etiam potest: ut in



triangulo *a e i* sit per 3 c 12 e 5 parallela *o u* contra *i e*. Hic tres particulares anguli *i a o*, *i a e*, *e a u* æquãtur duobus rectis per 1 c 8 e 5: sed tribus illis interiores æquantur: primo *e a i* sibi ipsi, tum reliqui alternis, per 12 e 5. Aristoteles 9 Philoso. quærit cur duo recti in triangulo, respondet quod ad unum punctum anguli sunt æquales duobus rectis, quæ Euclidis demonstratio est, de qua in scholis. Itaque

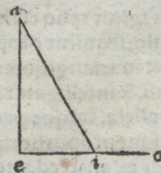


1. *Trianguli duo quilibet anguli sunt minores duobus rectis.*

Nam si tres æquales sunt, duo sunt minores. Euclides fecit 17 p 1, quæ consectarii loco hic assumitur. Et

2. *Continuato latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppositis.*

Hæc ratio est interiorum angulorum in uno triangulo: sequitur ratio exterioris cum interioribus oppositis, ut in *a e i* triangulo continuetur latus *e i* in *o*, duo deinceps *a i o*, & *a i e*, per 1 c 8 e 5 ęquantur duobus rectis, quibus ęquantur interiores: tollatur communis *a i e*, exterior relinquetur æqualis reliquis interioribus & oppositis

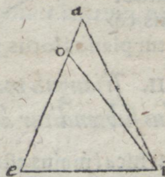


positis. Euclides fecit partem 32 p 1.

3. *Est major utrolibet interiore opposito.*

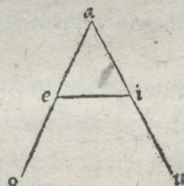
Euclides etiam hoc proposuit 16 p 1. at pari lucro assumitur.

10. *Si triangulum est æquicrurum, est in basi æquiangulum: & contra.* 5 & 6 p 1.



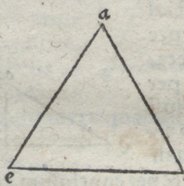
Sic Euclides trianguli affectionem complectitur nomine ἰσοσκελὲς æquicruri, sive triangulum sit æquilaterũ sive æquicrurum tantum, Antecedens patet per 1 c 6 e 3. Conversa patet per impossibile. Nam si crus alterũ majus esset, ut *ae*, amputetur per 2 c 5 e 5 æquale *oe*, & connectatur *oi*, tum per 1 c 6 e 3 basis *oi* æquaretur basi *ae*: at basis *oi* minor est. Nam per 7 e *ia* & *ao* (quibus æquatur *ae* cũ *oe*) ponatur æqualis ipsi *ai*, & *ao* sit cõmunis, majores sunt ipsa *oi*. Itaque eadem *oi* esset æqualis ipsi *ae*, & minor eadem. Thaletis Milesii hoc inventum est.

1. *Si trianguli æqua crura continuentur, anguli sub basim æquabuntur.*



Anguli enim *aei* & *ieo*, item *aie* & *eiu* bini æquãtur duobus rectis, per 1 c 8 e 5. Itaq; etiam inter se: detractis igitur interioribus æqualibus exteriores æquales relinquentur. Euclides fecit partem 5 p 1.

2. *Si triangulum est æquilaterum est æquiangulum: & contra.*



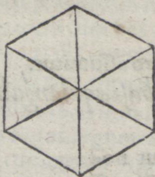
Consectarium est é trianguli equicruri lege de duobus & curibus & angulis, ut in exemplo *aei* demonstrabitur.

3. *Angulus trianguli æquilateri valet duas tertias recti.*

Nam cum 3 anguli æquales æquentur 2 rectis, 1 æquabitur $\frac{2}{3}$. Est 23 p 1 Regio.

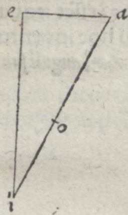
4. *Triangula sex æquilatera complent locum.*

Ut hic. Nā sexies $\frac{2}{3}$ recti, sunt $\frac{12}{3}$ recti, id est quatuor recti: At quatuor rectis cō/pletur planus locus, per 16 e 4 Ut hic.



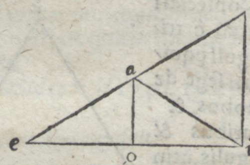
11. *Trianguli majus latus subtendit majorem angulum, & major angulus subtenditur á majore latere. 19 & 18 p 1.*

Ut hic *ai* majus esto latus quam *ae*, major erit angulus ad *e* quam ad *i*. Secetur enim ex *ai* æqualis ipsi *ae*, sitque *io*, tum angulus *aei* æquicrurus angulo *oie* major erit basi per thesin, ideoque major per 3 c 6 e 3. Conversa patet eadem figura: ut *aei* angulus sit major angulo *aie*. Itaque per idem 3 c 6 e 3 major est basi. Quę enim de angulis generaliter illic proponuntur, huc specialiter assumuntur de angulis in triangulo.



12. *Si recta in triangulo bisecat angulum, secat basin ratione crurum: & contra. 3 p 6.*

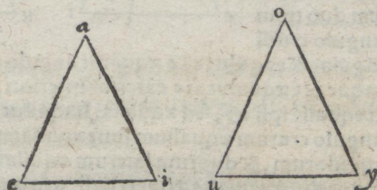
Superest mista proportio de lateribus & angulis. Esto triangulum *aei*, & bisectus sit angulus *eai* per rectam *ao*, dico ut *ea* est ad *ai*, sic *eo* esse ad *oi*: erigatur enim parallela *iu* per 3 c 12 e 5 contra *oa*, & continuetur *ea* infinite, secabit ipsam *iu*, per c 11 e 5: secetur igitur in *u*. Hic per 13 e 5, ut *ea* ad *au*, sic *eo* ad *oi*. At *au* æquatur ipsi *ai* per 10 e. Nam angulus *uia* æquatur angulo alterno *oai* per 12 e 5, & per thesin angulo æquali *oae*, & per 12 e 5 æquatur interiori angulo *aui*, & per conclusum æquali *uia*. Itaque per 10 e, *au* & *ai* æquantur. Ergo ut *ea* ad *ai*, sic *eo* ad *oi*. Conversa similiter demonstratur in eadem figura. Nam ut *ea* ad *ai*, sic *eo* ad *oi*, & sic *ea* ad *au*, per 8 e. Itaque æquantur *ai* & *au*, item anguli *eao* & *oai* æquantur angulis ad *u* & *i* per 12 e 5, æqualibus inter se per 10 e.



de comparatione triangulorum.

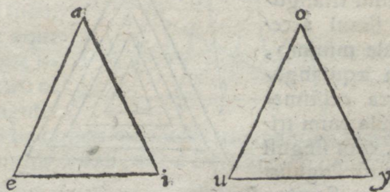
TRiangula æquilatera sunt æquiangula. 8 p 1.

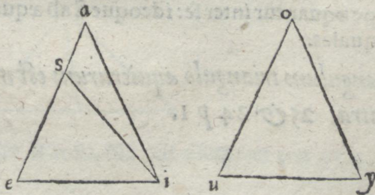
Atque hæc de geometria unius trianguli, sequitur triangulorum duorum inter se comparatio, primum ratio è lateribus & angulis: unde triangula inter se dicuntur æquilatera & æquiangula. Primo ex æqualitate laterum, æqualitas ducitur & angulorũ. Triangula igitur hic conjunctim æquilatera dicũtur, quorum latera sigillatim ęqualia sint, primum primo, secundum secundo, tertium tertio, etiam si singula triangula separata sint inæquilatera. æquales igitur angulos ostendit æqualitas laterum, per 1 c 6 e 3, ut hic.



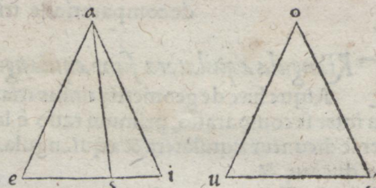
2. *Si duo triangula æquantur angulis vel duobus æquicruris vel binis æqualis aut cruris aut basis duorum, sunt æquilatera. 4 & 26 p 1.*

Prima pars patet sic. Sunto triangula *aei*, *ouy*: quia anguli ad *a* & *o* æquales sunt æquicruri, æquantur basi per 1 c 6 e 3. Secunda sic. Sunto triangula *aei* & *ouy* æqua binis angulis ad *e* & *i*, ad *u* & *y*, & æquentur crure *ei* & *uy*: dico æquilatera esse. Nam si latus *ae* (exempli caussa) sit majus latere *ou*, amputetur æquale *es*, & connectatur *is*. Hic per antecedentem triangula *sei*, & *ouy* æquiangula erunt, & angulus *sie* æquabitur angulo *oyu*, cui totus *aie* æquatus est ex thesi. Itaq; ęquarentur totũ & pars. Quare latus *ae* non est inæquale, sed æquale, & per antecedentem partẽ





triangula *aei* & *ouy* æquicrura æquantur angulo crurum, itaque & basi *ai* & *oy*. Tertia pars sic cogitur, ut in triangulis *aei* & *ouy* sint anguli ad *e* & *i* ad *u* & *y* æquales, ut prius, & basis *ae* anguli ad *i* æqualis basi *ou*, anguli ad *y*: dico æquilatera esse. Nam si latus *ei* sit majus latere *uy*, amputetur æqualis *es*, & connectatur *as*. Itaque per antecedentem duo triangula *aes* & *ouy* æqua angulo crurũ æqualium sunt æquiangula, & angulus *ase* æquatur angulo *oyu* æquanti per thesin angulum *aie*. Itaque *ase* æquatur *aie* exterior interiori, contra 2 c 9 e 6. Ergo basis *ei* non est inæqualis ipsi *uy*, sed æqualis. Itaque ut prius duo triangula *aei* & *ouy* æqua angulo crurum æqualium sunt æquilatera. Hic notabis ex æqualitate binorum angulorum, & duorum laterum æquilatera triangula fieri: neque satis esse angulos duos æquales æquari basi, ut æqualitas crurum cõcludatur. De hoc enim elencho monuimus 2 c 6 e 3. Quod si binos æques angulos non ad crus æquale, accidet triangulum multo majus, minori tamen æquale esse, quod apud Proclum Porphyrius diserte & accurate exposuit: de quo erit in scholis.



3. *Triangula æquantur ternis angulis.*

Quia tres anguli in quolibet æquãtur duob. rectis: ut hic maximum triangulum angulis simul acceptis est æquale minimo, neque tamen æquiangulum propterea existimetur: æquiangula enim triangula sunt, cum singuli anguli æquantur singulis: non autem universi universis.

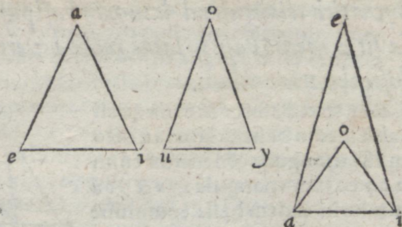


Si bini anguli duorum triangulorum æquantur, reliqui æquantur.

Terni nempe æquantur inter se: ideoque si ab æqualibus tollas æquales, relinquentur æquales.

4. *Si triangulum triangulo æquicrurum est majus basi, est majus angulo: & contra.* 25 & 24 p 1.

Adhuc ratio fuit æqualitatis in lateribus & angulis triangulorum, sequitur ratio inæqualitatis assumpta é communi & generali inæqualitate angulorum. Primum est é 3 c 6 e 3. Ut vides in *aei* & *ouy*.



5. *Si triangulum triangulo in eadem basi est minus interioribus cruribus, est majus angulo crurum.*

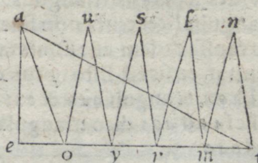
Hoc item est é 4 c 6 e 3, Euclidi est 21 p 1 de triangulo in eadem basi per triangulum majus comprehenso, & tamen sine conversa: ut *eoi* interius in eadem basi minus cruribus, quam *aei*.

6. *Triangula æquealta sunt ut bases.* é 1 p 6.

Ergo hæc triangulorum ratio est, sequitur proportio triangulorum, primum de recta cum basibus. Consectarium est é 12 e 4. Itaque

1. *Inæquali basi sunt æqualia.*

Id consectarium fuit generale 12 e 4, unde etiam conclusit Archimedes 7 theo. 1 de sphæ. Si triangulum triangulis æquealtum habet basim basibus æqualem, æquatur universis: ut hic vides *aei* æquari triangulis *aeo*, *uoy*, *syr*, *lrm*, *nmi*. Hinc etiam concludes triangula æquilatera esse æqualia, quia æquealta sunt inæquali basi, quod Euclides 4 p 1 conclusit per ἐφαρμοσιν. Et



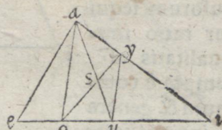
2. *Si recta á vertice trianguli bisecat basin, bisecat triangulum, & diameter est trianguli.*

Ut hic vides. Bisegmenta enim sunt triangula æquealta, nempe communis verticis intra easdem parallelas, & in basibus æqualibus. Ergo æqualia & recta illa erit diameter per 5 e 4, quia est per centrum.



7. Si recta

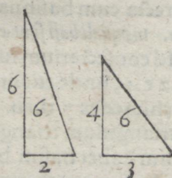
7. *Si recta est á vertice trianguli ad datum in basi punctum non medium, & parallela sit á medio basis in latus, recta á vertice parallelæ in dictum punctum bisecabit triangulum.*



Esto triangulum *aei*, & *ao* secet basin *ei* in *o* inæqualiter, & *uy* sit parallela ab *u* medio basis in latus *ai*, dico rectam *yo* bisectricem esse trianguli: conectatur enim *au*, ea bisecabit per 2 c 7 e. Jam triangula *ayu* & *you* æquantur, quia æquealta in eadem basi: commune tollatur *ysu*, relinquentur æqualia *asy* & *osu*, commune rectilineum *ysui* addatur utrique æqualium, tum *oyi* æquabitur dimidio *aui*: Itaque & reliquum rectilineum *aeoy* dimidium erit. Jordani est 21 p 1, ubi sunt 22 & 23 p, de dato puncto intra & extra triangulum, quæ geometria si ab aliquo sine mendis ederetur, permagna esset utilitas quidlibet figura triangula comprehensum in dato puncto bisecandi, ut plerumque est inter cohæredes puteus, fons, arbor, & similia.

8. *Si triangula æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra.* 15 *p* 6.

Proportio directa in triangulis ea est, reciproca sequitur. Consectarium est é 13 e 4, quod manifestum est, quoties æqualis angulus rectus est: tum enim crura ista æquales sunt altitudines & bases: Ut hic vides separatis triangulis. In triangulis autem obliquangulis licet crura non sint altitudines, veritatis tamen caussa eadem est: siquis tamen demonstrationem requirat, ea sic est. Esto igitur diagramma in triangulis *aei*, *aou*, & anguli *oau* & *eai* æquales, sitque ut *ua* ad *ae*, sic *ia* ad *ao*: dico triangula *aou*, *eai* æquari. Nam *uao* ad *oae* est ut *ua* ad *ae* per 6 e, & *ia* ad *ao* per thesim, est ut e *ai* ad *eao*. Itaque *uao* & e *ai* ad *eao* sunt proportionalia, ideoque æqualia sunt inter se. Conversa eodem sorite, sed retrogrado concluditur. Nam *ua* ad *ae* est ut *uao* ad *oae* per 6 e, & ut *eai* per thesin, quia æqualia, & ut *ia* ad *ao* per idem. Quare *ua* est ad *ae*, sicut *ia* ad *ao*.

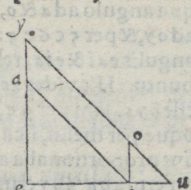


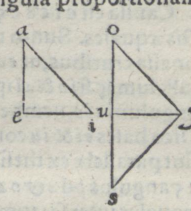


9. *Si duo triangula sunt æquiangula, sunt proportionalia cruribus: & contra.* 4, 5 *p* 6.

Comparatio & rationis & proportionis triangularis antecessit, restat extrema similitudo triangulorum, quæ constat illa quidem é ratione angulorum & proportio-

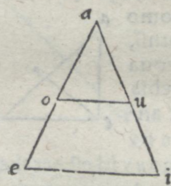
proportione crurum. Itaque merito angulorum ratio præponitur, unde crurum non ratio, sed proportio posterior colligitur. Sunto igitur triangula *aei* & *iou* æquiangula, & ad eandem rectam *eiu* communi puncto *i* comparata: *oi* & *ae* cum anguli ad *i* & *e* ponantur æquales, erunt parallelæ per 12 e 5. Itaque per 1 c 12 e 5 *uo* & *ea* continuatæ concurrent. Idem rectæ *ai* & *yu* sunt per 12 e 5 parallelę, quia angulus *aie* æquatur interiori opposito *oui*. Itaque cum *ai* sit parallela basi *yu*, per 12 e 5 erit *ea* ad *ay*, id est per 5 c 12 e 5 ad *io* ut *ei* ad *iu*, & alterne *ea* ad *ei* ut *io* ad *iu*. Hæc prima est proportio. Item cum *oi* sit parallela basi, *ye* erit *yo*, id est per 5 c 12 e 5 *ai* ad *ou* ut *ei* ad *iu*, & alterne *ai* ad *ie*, ut *ou* ad *ui*. Hæc secunda est proportio. Denique æqueordinate *ae* est ad *ai*, ut *oi* ad *ou*. Quare si triangula sunt æquiangula, sunt proportionalia cruribus. Conversa sic patet. Sunto triangula proportionalia cruribus *aei*, *ouy*, & ut *ae* est ad *ei*, sic esto *ou* ad *uy*, & ut *ai* est ad *ie*, sic esto *oy* ad *yu*. Tum ad puncta *u* & *y* æquentur per 5 c 6 e 3 anguli angulis ad *e* & *i*, & fiat triangulum *uys*, reliqui anguli ad *a* & *s* æquabuntur per c 3 e, & triangulo *yus* erit æquiangulum datum *aei*, & per antecedentem cruribus proportionale: ita duo triangula *ouy* ex thesi, & *uys* ex fabrica sunt cruribus proportionalia eidem *aei*, & ut *ae* ad *ei*, sic *ou* ad *uy*, sic *su* ad *uy*. Itaque cũ *ou* & *su* ad idem *uy* sint proportionalia, æquantur: item ut *ai* ad *ie*, sic *oy* ad *yu*, sic item *sy* ad *yu*. Itaque *oy* ad *sy* cum sint proportionalia ad *yu*, æquantur: *yu* commune latus est. Triangulum igitur *ouy* triangulo *syu* est æquilaterum: & per 1 e æquiangulum, ideoque æquiangulum triangulo *aei*: quod erat propositum. Generaliter autem prædictum est 1 c 14 e 4 de lateribus homologis subtendentibus æquales angulos. Itaque





Si recta in triangulo est parallela basi, desecat triangulum æquiangulum toti, & minus basi.

Ut in *aei* triangulo *ou* desecat triangulum *aou*, per 12 e 5 æquiangulum toti, & minus basi, ut patet per 9 e, & per alternationem laterum.



10. *Si duo triangula sunt proportionalia cruribus æqualis anguli, sunt æquiangula. 6 p 6.*

h Sunto

Sunto igitur proposita triangula aei & ouy æqua angulo ad a & o, & cruribus ea ad ai sicut uo ad oy, & per 5 c 6 e 3 æquentur anguli soy & oys angulis eai & eia, reliqui ad s & e per c 3 e æquabuntur: Hic vides aei triangulum æquiangulum esse oys. Jam per 9 e, ut ea ad ai, sic so ad oy, ideoque per thesin, sic uo ad oy. Itaque cum uo & os sint proportionalia ad oy æquantur. Denique si commune addatur oy, æquantur crura ou & oy cruribus so & oy, & per c 3 e reliqui anguli. Quare secundum triangulum tertio similiter æquiangulum erit: ideoque si triangula proportionalia cruribus æquantur angulo crurum, sunt æquiangula.

II. *Si cruribus proportionalia & alterne parallela intermedium angulum faciunt, bases habent in rectam continuas. 32 p 6.*

Caussa est è 1 c 8 e 5. Nam duos utrinque facient cum incidente ai duobus rectis æquales. Sunto triangula aei & oiu proportionalia cruribus, ut ea ad ai, sic io ad ou, & ea sit parallelum ipsi io & ai ipsi ou, item faciat intermediū angulum aio, nempe intermediis cruribus ai & oi: Dico bases ei & iu continuari in rectam. Cū enim sint parallelæ ex thesi ae & oi, recta ai faciet per 12 e 5 angulos ad a & o æquales alterno aio. Ideoque æquales inter se: tumque per 10 e data triangula sunt æquiangula. Itaque angulus oiu æquatur angulo aei. Tres igitur anguli oiu, oia, aie per 3 e æquantur tribus angulis trianguli eai æquātib. per 9 e 6 duos rectos, ideoque & ipsi duobus rectis æquantur. Quare per 1 c 8 e 5 ei & iu in rectam continuantur. Hæc propositio adhibetur 17 p 13, & 29 p 1. Apollonii.

12. *Si habeant unum angulum æqualem, alterum cruribus proportionalem, tertium homogeneum, sunt æquiangula. 7 p 6.*

Sunto proposita triangula æqua angulo ad a & o, & proportionalia cruribus angulorum ad e & u, & reliquo angulo ad i & y homogenea, id est ut ambo anguli sint vel acuti, vel obtusi, vel recti, sed primo acuti. Dico reliquos ad e & u æquari: secus per 5 c 6 e 3 æquetur aes ipsi ouy, habebis per 1 c 3 e æquiangula, & angulus ase æquabitur angulo oyu, acutusque est uterque, ac per 9 e aes, ouy atcribus proportionalia: atque ut ae ad es, sic ou ad uy id est per thesim, sic ae ad ei. Itaque quia eadem oa ad duas es & ei habet eandem rationem, æquantur es & ei, & ideo per 10 e 6 anguli ad basim in s & i æquantur. Acutus igitur uterque, acutus item & ase contra 1 c 8 e 5. Idem vero prorsus accidet utroque reliquo vel obtuso, vel recto. Pars autem ultima de recto patet per c 3 e.

de generibus triangulorum.

Triangulum est rectangulum vel obliquangulum.

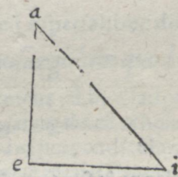
Partitio trianguli sequitur ex angulis é communibus differentiis: sed hic specialis primum, & maximi momenti, ut erit in quadrangulis & prismatis.

2. *Triangulum rectangulum est quod habet unicum angulum: obliquangulum quod nullum. 27 d 1.*

Rectangulum triangulum in geometria præcipuas vires habet, & á præstantibus mathematicis non immerito magister matheseos appellatur. Itaque

1. *Si duæ perpendiculares connectantur, constituent triangulum rectangulum.*

Ut in a e i. Hæc fabrica rectanguli ducitur é definitione recti anguli. Perpendiculares enim rectæ recti anguli sunt artifices, ut patet 8 e 3.



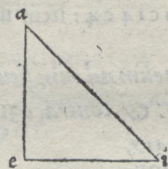
Et

2. *Si trianguli angulus ad basin rectus est, perpendicularis á vertice est crus alterum.*

Ut in eodem exemplo.

3. *Si triangulum rectangulum est æquicrurum, uterque angulus ad basim est dimidius recti: & contra.*

Ut in a e i: æquantur enim ambo uni recto per 9 e 6, & inter se per 10 e 6.



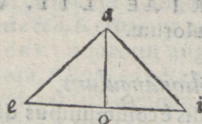
Itaque

1. *Si trianguli angulus æquatur reliquis, est rectus.*

Quia æqualis dimidio duorum rectorum. Consectarium est Euclidis ad 31 p 3. Et

2. *Si recta á vertice trianguli bisecans basin est æqualis bisegmento, angulus verticis rectus est.*

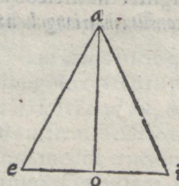
Ut in *aei* recta *ao* bisecans *ei* basin in *o* equalis sit ipsi *eo* di-



midio basis, facit triangula æquicrura, & particulares verticis angulos æquales extremis ad *e* & *i* per 10 e 6. Est Jordani 1 p. Itaque verticis angulus æquatur reliquis. Ideoque per 1 c rectus.

4. *Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in basim secat triangula similia toti & inter se. 8 p 6.*

Ut in triangulo *aei* perpendicularis *ao* secat triangula *aoe* & *aoi* similia toti, quia ipsi æquiangula: cum rectus utrinque sit unus & alter communis in *i* & *e*. Reliquus igitur æ-



quatur reliquo, per c 3 e 7. Itaque particularia triangula sunt æquiangula toti, proportionaliaque cruribus æqualium angulorum, per 9 e 7: similia vero inter se triangula esse patet per 3 c 14 e 4.

Itaque

1. *Perpendicularis est proportionalis inter segmenta basis.*

Ut *io* ad *oa*, sic *oa* ad *oe*, quia æqualium angulorum crura sunt proportionalia per 4 e. Hinc Platonis mesographus inventus, de quo in scholis.

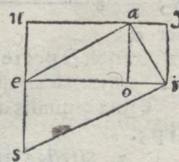
Et

2. *Crus utrumlibet est proportionale inter basim & basis segmentum conterminum.*

Ut enim *ei* ad *ia* in toto triangulo, sic *ai* ad *io* in majore. Sic enim homologa sunt latera, quæ subtendunt æquales angulos per 1 c 14 e 4: item ut *ie* ad *ea* in toto triangulo, sic *ae* ad *eo* in minore.

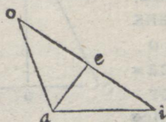
5. *Si basis trianguli subtendit rectum, rectilineum ad eam situm æquatur rectilineis ad crura similibus similiterque sitis: & contra. é 31 p 6.*

Sit triangulum rectangulum *aei*, & triangula *eau*, *aiy*, & iis simile similiterque situm per 4 c 14 e 4, sit triangulum *ies*. Dico ipsum duobus illis æquari. Sit ab angulo recto *a* perpendicularis *ao*, hæc ostendet proportionales bis ternas per 2 c 4 e, nempe *ie*, *ea*, *eo*, item *ei*, *ia*, *io*. Itaque per 1 c 15 e 4, ut *ie* est ad *eo*, sic triangulum *ies* est ad triangulum *eau*, & ut *ei* est ad *oi*, sic triangulum *eis* est ad triangulum *aiy*: At *ei* æquatur *eo* & *oi*, suis nempe partibus. Quare per secundam compositionem in arithme-



tica 9

tica 9 cap. 2 lib. triangulum *e i s* æquatur triangulis *e a u* & *i a y*. Euclides nominat hic εἶδ@ καὶ εἴδεσι speciem & speciebus, id est figuram & figuris. Nos ad plana rectilinea accommodavimus. Caussa dicetur in scholis. Conversa sic probatur. Sit triangulum *a e i* & perpendicularis erigatur *e o* super *a e* equalis ipsi *e i*, & connectatur *o a*. Hic per præcedentem sita ad *o e* & *e a* rectilinea, id est per fabricam ad *a e* & *i e* æquantur rectilineo ad *a o* simili & similiter sito, & ex thesi æquantur simili & similiter sito ad *a i*. Itaque ad *o a* & *a i* similia rectilinea cum sint æqualia, homologa latera habebunt æqualia, per 1 c 14 e 4, & triangula duo fient æquilatera, & per 1 e 7 æquiangula. Rectus autem est ex fabrica *o e a*, cui æqualis concluditur *a e i*. Itaque *a e i* per 8 e 5 est rectus.



6. *Triangulum obliquangulum est obtusangulum vel acutangulum.*

Partitio est é specialibus differentiis anguli.

7. *Obtusangulum quod habet unum obtusum angulum. 28 d 1.*

Rectus unicus est in triangulo. Itaque & obtusus. Itaque

1. *Si obtusus angulus est ad basim, perpendicularis á vertice cadit extra.*

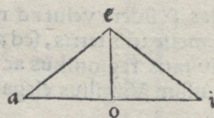
Ut hic in *a e i* perpendicularis *i o*, ut patet 2 c 2 e. Et

2. *Si trianguli angulus sit major reliquis, est obtusus.*

ut patet é 1 c 3 e. Et

3. *Si recta á vertice trianguli bisecans basim, est minor bisegmento, angulus verticis obtusus est.*

Ut in *a e i* sit *e o* bisecãs minor, ut patet per 2 c 3 e.



8. *Triangulum acutangulum est quod habet omnes acutos angulos. 29 d 1.*

Itaque

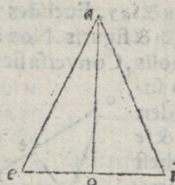
1. *Perpendicularis á vertice cadit intra.*

Ut in *a e i* perpendicularis *a o*, ut patet per 2 c 2 e.

2. *Si trianguli angulus sit minor reliquis, est acutus.*

Ut patet per 1 c 3 e.

3. *Si recta á vertice trianguli bisecans basim est major bisegmento, angulus verticis acutus est.*

Ut in *ae i* sic bise- cans *a o* ma- jor biseg


mento, angulus *a e i* erit acutus, ut patet per 2 c 3 e.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. IX.

de Geodæsia rectarum é triangulis rectangulis similibus

TRiangulorũ rectangulorum similium geometria, cum plerosque alios usus habet, tum imprimis geodęsiã linearũ rectarum suppeditat, & magisterium geometriæ in triangulis rectangulis antea collocatum, tandem verum magisterium hic esse deprehendetur. Continebit enim geodęsiam rectarum, posteaque geodęsiam planorum & solidorum, é dimensis lateribus, quæ rectæ lineæ sunt. Ad rectarum igitur geodęsiam radius instrumentum omnium geometricorum instrumentorũ præstantissimum & commodissimum adhibetur.

1. *Radius est norma crurum inæqualium.*

Instrumentum perantiquum est, & vulgo baculus Jacob dicitur, tanquam á Sancto Patriarcha illo jam olim inventus sit. Archimedes in arenæ numero simile quidpiam notavit, & Hipparchus instrumento non absimili ausus est rem etiam diis improbam, annumerare posteris stellas, & sidera velut ad normam expangere, ait Plinius. Et sane radius non solum metiendis terris, sed astris loco & ordine definiendis, omnibusque cælestis civitatis regionibus ac viis describendis præcipue usurpatur: & sic utrumque usum Virgilius eleganter expressit.

—ecquis fuit alter,
Descripsit radio totum, qui gentibus orbem? Egl. 3 item
—cæliqne meatus. 6 Aen.
Describent radio & surgentia sidera dicent.

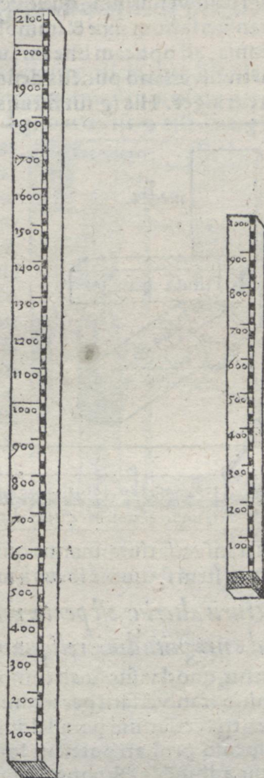
Arabes tandem, ut Rabi, Levi, sed proximis temporibus Germani imprimis excoluerunt, Regiomontanus, Vernerus, Schonerus. Appianus maxime omnium Gemma opere separato illustravit. Radius igitur suis & geometricis partibus describatur: astronomica autem distributio in suum tempus reservetur, tum usus adhibeatur dimensionibus linearum. Radius autem pro arbitrio mensoris parvus aut magnus est. Quantitas enim instrumenti aliter definiri non potest.

2. *Radii crura sunt index & transversarium.*

3. *Index*

3. *Index est duplus sesquidecimus transversarii.*

Ut hic.

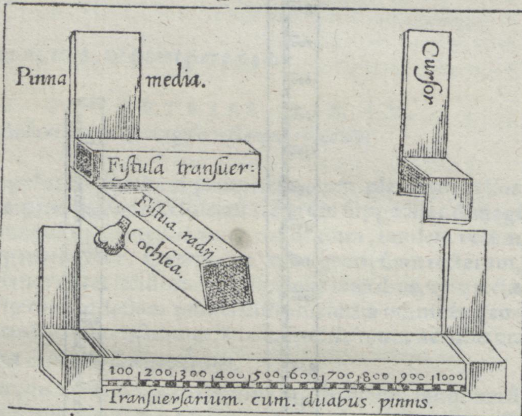


4. *Transversarium est per indicem volubile modo sublimius, modo humilius.*

Hæc ratio in definiendis & componendis radii cruribus perpetua est: ut si trãsversarium sit 10 partium, index sit 21. Transversarium itaque sit 2000 partium, index erit 4200: & quia index sustinere debeat, transversarium sustineri, index esto crassior, transversarium tenuius. Verum é qua materia sit radii pars utraque ænea, lignea nihil interest, modo firma sit & stabilis: transversarium

tamen

tamen commodius æneis fistulis volvetur, & per indicem & per se sursum deorsumve ad rectos ita contiguis, ut ore alterno latus alterius contingatur: tertia fistula sit volubilis per totum transversarium, quæque ideo cursor appelletur: quarta & quinta fistulæ transversarium fixæ & immobiles terminent ad tertiam & secundam æquealtæ pinnis, ad opticam lineam, ubi opus erit distermi nandum, & tanquam certis in transversario punctis definiendum. Tres primæ fistulæ cochleis sistentur, ubi res exiget. His igitur fistulis transversarium tantum efficitur, quanto opus fuerit, ut hic vides. fabrica radii dicta est, usus sequitur, ad quem communiter attinet primo justam esse distantiam: nec enim visus est infinitus: alterum obductum oculum: vis enim optica é duobus oculis in unum conducta firmius collimat, & radius ad os genæ commodius applicatur: Hic enim oculus est tanquam cẽtrum circuli, cui inscriptum sit transversarium: manus quietas: nam si trepident, geodęsiæ proportio turbabitur. Item stationis locus á medio pedis.



5. *Si visus est ab initio cruris alterius, est per terminum reliqui, crusque alterum est rectum metiendæ magnitudini, reliquum parallelum.*

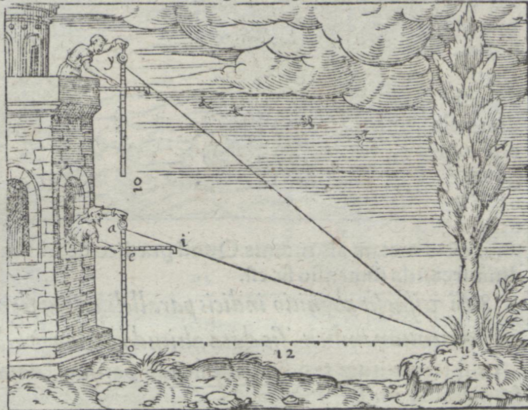
Hæc communia præponuntur, quod visus sit ab initio indicis per terminum transversarii, vel contra ab initio transversarii per terminos indicis: quodque index sit rectus metiendæ lineæ trãsversarium parallelum, vel contra. Perpẽdiculum vero indicis plumbo suspenso probari potest in longitudine: in altitudine aũt & latitudine fides oculis adhibẽda est, tametsi modicus deflexus perpendiculi sensilẽ errorem adferre non potest. Terminum vero transversarii intellige, qui linea visus efficitur, sive extrema pinna, sive quocunq; alio loco cursor.

6. *Longitudo & altitudo triplicem mensuram habent, primam & secundam unius distantiæ, & quidem data alterius dimensione pro tertio proportionali, tertiam duplicis distantiæ, qualis tantum est dimensio latitudinis.*

7. *Si vi-*

7. *Si visus sit ab initio indicis recti in metam longitudinis, erit ut segmentum indicis ad segmentum transversarii, sic mensoris altitudo ad longitudinem.*

Theorema est Euclidis in opticis, quod & ideo libentius assumpsimus, ut planum fieret, hunc etiam geometricum usum geometriæ doctori nequaquam alienum geometricæ dignitatis visum esse. Sit igitur segmentum indicis à vertice nempe ad transversarium, 6 partium, segmentum transversarii ab indice nempe ad opticam lineã, 18. Index qualis hic esto mensor altitudo quatuor pedum, longitudo erit 12 pedũ. figura sic est: Ut enim *a e* ad *e i*, sic *a o* ad *o u*, ut patet per 9 e 7. Sũt enim triangula similia. Nam *a e i* & *a o u* recti, & qui ad *a* communis: reliquus igitur æquatur reliquo per c 3 e 7. Idem erit metiendi modus ex altiore loco, ut ex *y*, segmentum indicis 5 partium, tumque sit altitudo 10 pedum, transversarium 6: Neque vero quidquam interest, utrum longitudo sit in subjecto plano, an in ascensu descensuvè montis, ut in subjecta figura. Hoc modo poteris metiri latitudines fluminũ, vallium, fossarum. Longitudo enim semper est hoc modo, ut in mari distantiam navium liceat metiri,







quõ & Thales Milesius apud Proclum 26 p 1 metitur. Exẽplũ hic habes. Deinceps in dimensione longitudinis & altitudinis visus est in metam altitudinis. Quod prædico ne frustra sæpius iteretur. Lõgitudinis secunda dimensio sic est.

8. *Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data altitudo ad longitudinem.*

Ut si segmentum transversarii sit 120 partium, data altitudo 400 pedum, segmentum indicis 210 partium: Longitudo per auream regulam erit 700 pedum. figura sic est, ut demõstratio par superioribus, vel etiam facilior. Triangula enim sunt æquiangula, ut prius. Uti igitur *o u* ad *i a*, sic *e i* ad *i a*. Hæc dimensio est prima secundaque

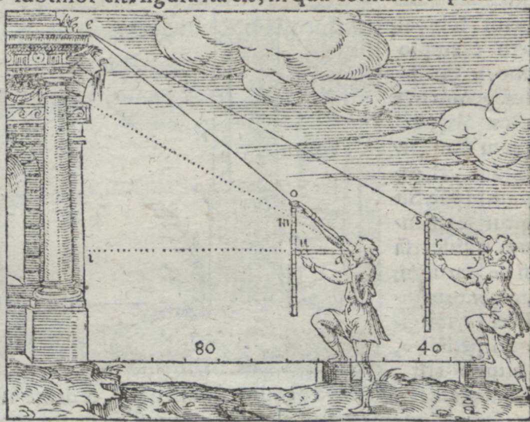


longitudinis per simplicem distantiam, tertia superest per duplicẽ, ubi transversarium si recedenti copia sit major, deprimetur in secunda distantia.

9. *Si visus*

9. Si visus sit ab initio transversarii paralleli, erit ut in indice differentia majoris segmenti ad minus, sic differentia secundæ distantiæ ad longitudinem.

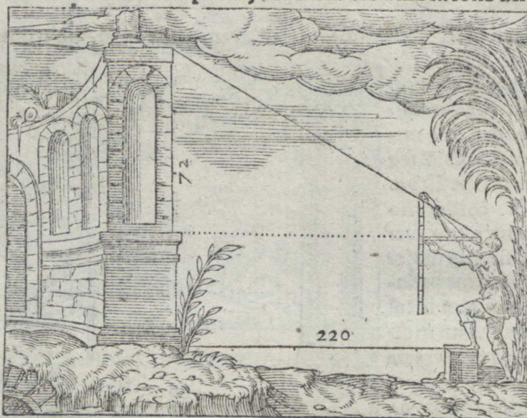
Hæc geodæsia paulo subtilior est. figura ita est, in qua collimatio prima sit ab *a* initio transversarii & é quæsita longitudine *ai* per *o* terminum indicis in *e* metam altitudinis: & segmētum indicis sit *ou*. Secunda collimatio sit ab *y* initio transversarii é distantia majore per *s* terminum indicis in eandem metā *e*, & segmentum indicis sit *sr*: Hic peracta dimensio est sumpta differentia ipsius *ou* supra *sr*. Demonstrationis ergo cætera effinguntur.



Parallela igitur contra *ye* in prima distantia ab initio transversarii sit *aml*. Hic primum *mu* æquatur ipsi *sr*. Nam *mua* & *sry* triangula æquantur crure *ua* & *ry* per thesin (quia transversarium eodem suo loco manet) & anguli ad ipsum *mua*, *uam* æquantur angulis *sry* & *rys*, quia illi recti, hi exterior & interior oppositi. Itaque per 2 e 7 sunt æquilatera, & *om* est differentia segmētorum indicis. Deinde ut *om* est ad *mu*, sic *el* ad *li*, ut æquatio ternorum graduum ostendit. Nam per 9 e 7 ut *om* ad *ma*, sic *el* ad *la*, & ut *ma* ad *mu*, sic *la* ad *li*. Itaque ex æquo, ut *om* ad *mu*, sic *el* ad *li*, & per 8 e 6 sic *ya* ad *ai*: ut si differentia primi segmenti sit 36 partium, secundum segmentum sit 72, differentia secundæ distantiæ 40 pedum, quæsita longitudo erit 80 pedum. Atque hic altitudo nulla definite datur, ut faciat ullum principis proportionis terminum: Altitudo tamen licet dimēsionis ignotæ est quæsitæ longitudinis terminus: ideoque adjumento ad ratiocinationem quæstionis, quia perpendiculariter insistens extremæ longitudini intelligitur. Tertia igitur ista longitudinis geodæsia sæpe est necessitatis, cū superiore neutro modo longitudo capi possit, interjecto quippe vel muri vel arboris vel montis impedimēto, ut meta longitudinis videri nequeat, qui primus modus est, neque altitudo contermina extremæ longitudini data sit, qui secundus est modus. Adhuc dimensio fuit longitudinis triplex prima & secunda é data altitudine, tertia é distantia duplici: sequitur altitudinis dimensio item similis triplex, & altitudo est perpendicularis á vertice magnitudinis ad solum mensoris, quomodo definita est altitudo 6 e 4. Prima geodæsia altitudinis sic est.

10. Si visus sit ab initio transversarii recti, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

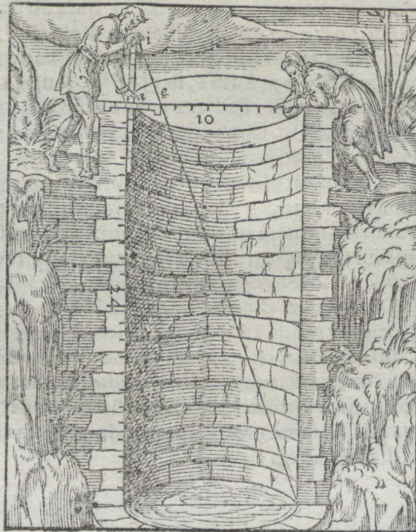
Deducitur è 18 th. 2 Euclidis in opticis, ubi Euclides umbra solis utitur pro radio optico, qui nunc adhibetur: & hic altero exemplo docuit Euclides geometriæ usum nequaquam sibi sordidum vel ingratum esse. Sit igitur segmentum transversarii 60 partium, segmentum indicis 36, longitudo pedũ 20, altitudo erit



per auream regulam 72 pedum. figura sic est, & demonstratur per 9 e 7 ut prius: sed additur mensoris altitudo, quæ si sit quatuor pedum, altitudo tota erit 76. *Itaque in eversa altitudine.*

Si visus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transversarii ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem.

E[a] conclusa nempe altitudine subducto quod supereminet, relinquetur altitudo putei. Theorema est 20 in Euclidis opticis, id est tertium testimoniũ de geometriæ usu geometris nec illiberali nec ingrato, nempe de dimensione putei, rupis, turris. Itaque segmentum transversarii *a e* sit 5 partium, segmẽtum indicis *e i* 13, diameter putei (quæ modo est pro longitudine) 10 pedum, quæ superne sumatur pro æquali in fundo, oppo-

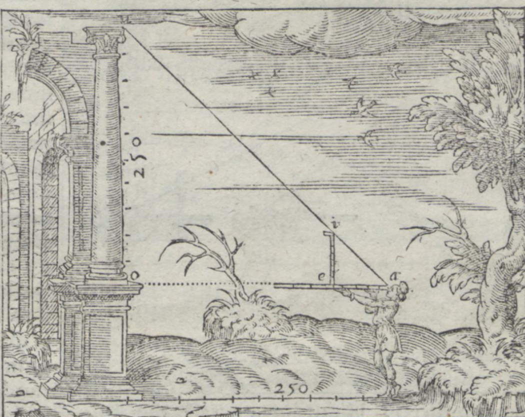


sita alti-

sita altitudo per 9 e 7 & auream regulam erit 26 pedum, unde tollendum segmentum indicis supra oram putei, relinquetur vera altitudo, ut si segmentum illud 13 partium valeat pedes 2, altitudo erit pedum 24. Secunda altitudinis dimensio.

II. *Si visus sit ab initio indicis recti, erit ut segmentum indicis ad segmentum transversarii, sic data longitudo ad altitudinem.*

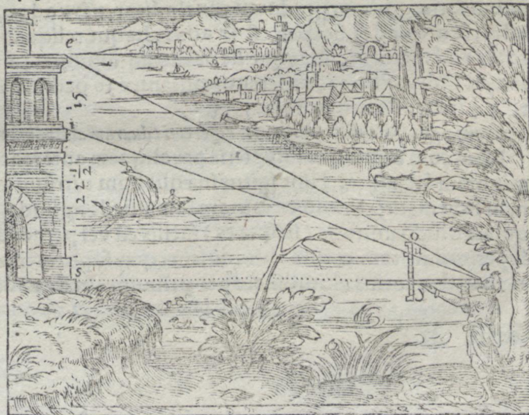
Ut si indicis segmentum est 60 partium, trāsversarii segmentum 60 partiū, lōgitudo data 250 pedes, per auream regulam altitudo erit 250 pedum: ut vides in subjecto exemplo: ut enim *a e* ad *e i*, sic *a e o* ad *o u* per 9 e 7. Sed inventæ altitudini altitudo mēsoris addenda est, quæ si sit 4 pedum, tota altitudo erit 254 pedum. Et hic modus á superiore distat solo radii situ.



Itaque

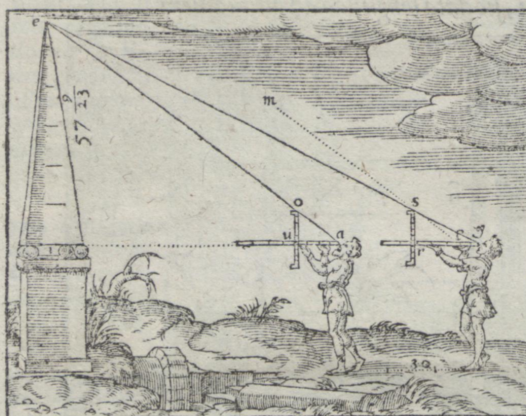
Si visus sit ab initio indicis recti per pinnas transversarii in terminos notæ partis, erit ut intervallum pinnarum ad reliquum supereminentis transversarii, sic nota pars ad reliquam.

Consectarium est de altitudinis nota parte, unde reliquū cognoscatur, ut in diagrammate. Sicut *o u* ad *u y*, sic *e i* ad *i s*. Nam ut *o u* ad *u a*, sic *e i* ad *i a* per 9 e 7: & ut *u a* ad *u y*, sic *i a* ad *i s*, & ex æquo: ut *o u* ad *u y*, sic *e i* ad *i s*. Hic habes terminos tres proportionis. Sit igitur *o u* 20 partium, *u y* 30, nota pars *e i* 15 pedum: Cōcludes pro reliquo *i s*



Dimensio altitudinis prima secundaque sic est, tertia sequitur.

12. *Si visus sit ab initio indicis recti, erit ut in indice differentia segmenti ad differentiam distantiæ, sic segmentum transversarii ad altitudinem.*

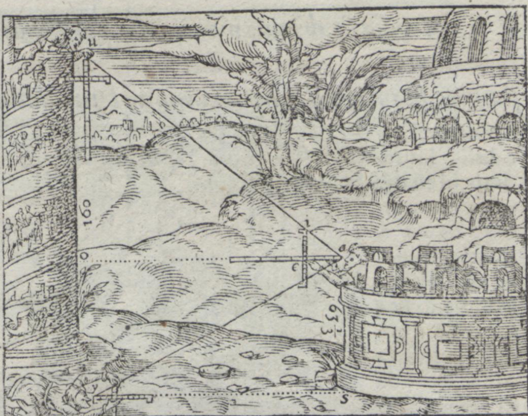


Huc revocatur subtilitas quæ fuit in tertia geodæsia longitudinis: prima itaque collimatio sit ab *a* initio indicis perpendicularis, & é longitudine ignota *ai* per *o* terminum transversarii in *e* metam altitudinis *ei*: & segmentum indicis *ua*: secunda collimatio sit ab *y* initio ejusdem indicis & é majore distantia per *s* terminum transversarii in eandem metam *e*: & segmentum indicis *rl*. Hic ut antea peracta dimensio est, sumpta differentia ipsius *yr* supra *au*, demonstratio jam (ut antea) concludetur. Parallela *lsm* contra *aoe* erigatur. Hic primum triangula *oua* & *srl* æquilatera sunt per 2 e 7, cum anguli ad *a* & *l* exterior & interior æquales æquentur basi *ou* & *sr*, segmentum transversarii in utraque distantia idem manet. Itaque *ua* æquatur *rl*. Jam reliquum sorite quatuor graduum concluditur, ut *yr* ad *yu*, sic per 9 e 7 *sr* id est *ou* ad *ei*, & ut *ou* ad *ei*, sic *au* id est *lr* ad *ai*. Itaque reliqua *yl* ad reliquam *ya* erit ut tota *yr* ad totam *yi*, ideoque de primo ad ultimum, sicut *sr* ad *ei*. Differentia itaque indicis esto 23, differentia distantiæ 30 pedum, segmentum transversarii 44: altitudo erit pedum. $57\frac{2}{23}$

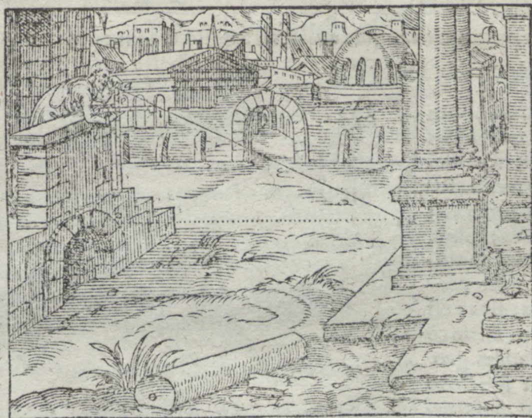
Itaque é geodæsia altitudinis patet differentia duarum altitudinum.

Nam cum utramque sumpseris per aliquem antecedentium modorum, tolle minorem é majore. Hinc igitur inæqualium turrium altera, alterius altitudinem licet metiri. Primo ex minore sumatur longitudo per primum modum, quia altitudo minoris (in qua es) facilis est vel perpendiculo vel modo aliquo superiorum, tum metire altitudinem, quæ supra minorem est, & adde minori, habebis totius altitudinem per primum aut secundum modum. figura sic

est, & de-



est, & demonstratur per 9 e 7. ut enim *ae* ad *ei*, sic *ao* ad *ou*. Contra é majore licet metiri minorem. Si visus primum á vertice majoris deinde á basi, vel medio loco per pinnã transversarii, sit in verticem minoris altitudinis, erit ut sunt dictæ partes indicũ ad partes primi indicis, sic altitudo intra stationes ad suum excessum supra quæsitam altitudinem. Sunto enim partes indicũ 12 & 6, summaque 18 ad 12: sic altitudo *uy* 190 pedum ad excessum $126\frac{2}{3}$ pedum. Reliquum igitur $63\frac{1}{3}$ erit altitudo quæsita *as*. Licet vero & é vertice turris metiri distãtiam turrium inter se: primus enim modus est metiendæ longitudinis, neq; quicquã hic differt, nisi quod radius extra datã altitudinẽ suspenditur. figura sic est, & demonstratio est per 9 e 7: ut enim est *ae* segmẽtum indicis ad *ei* segmentum trãsversarii, sic est data altitudo *do* ad longitudinem *ou*. Ergo altitudinis geodęsia sic est, ubi data est longitudo uel pars altitudinis, ut in primo & secundo modo, vel ubi duplex est distantia, ut in tertio.



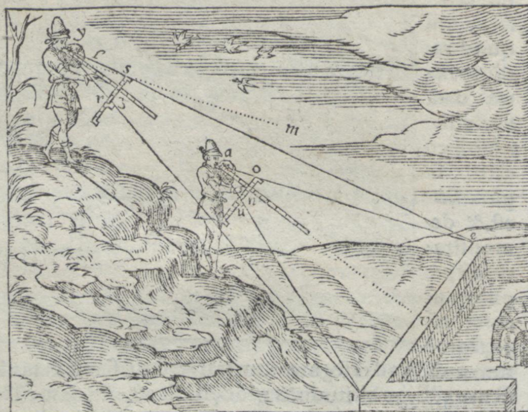
13. *Si vi-*

13. *Si viſus ſit ab initio indicis recti per pinnas tranſverſarii in terminos latitudinis, erit ut in indice differentia ſegmenti ad differentiam diſtantiæ, ſic intervallum pinnarum ad latitudinem.*

Supereſt geodæſia latitudinis, id eſt trāſverſæ lineæ rectæ. figura & demonſtratio ſic eſt. Prima collimatio ſit *a e i* per *o* & *u* pinnas tranſverſarii *o u*: ſecunda ſit *y e i* per *s* & *r* pinnas tranſverſarii *s r*: tum parallela per punctum *s*, ducatur *l s m* contra *a o e*. Hic primum triangula *o u a* & *s i l* æquilatera ſunt per 2 e 7, quia anguli *u a o* & *j l s* exterior & interior æquales æquātur baſi *o u* & *s j* per theſin. quia hic



ſegmentum tranſverſarii idem manet. Itaq; *u a* æquatur ipſi *j l*. His poſitis redit fere demonſtratio tertiæ altitudinis: ut enim *y l* eſt ad *y a*, ſic eſt *s j* ad *e u*, & quia partes multiplicātibus ſunt proportionales, ſic *s r* eſt ad *e i*. Cætera enim cō veniunt. Eadem geodæſia fuerit ſi é loco ſupero metiare ſubjectam latitudinem, ut in poſtremo exēplo. Atqui é diſtantia duorum locorum, id eſt é latitudine, ut arborum, montium, urbium, magna geographis & chorographis adjumenta comparantur. Quamobrem geodæſia re



ctarũ linearum ejusmodi est in longitudine, altitudine, latitudine, unde pictor architectus, cosmographus loci cujuslibet insignis fenestras, statuas, pyramides, signa, denique lõgitudinem & altitudinem dimensione simplici aut duplici, latitudinem tantum duplici, id est locorum omnium naturam symmetriamq; perspiciet. Ut in subjecto exemplo liceat experiri.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. X.
de triangulato & parallelogrammo.

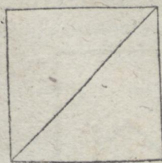
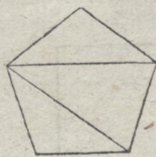
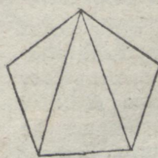
ATque hæc de geodæsia linearum rectarum é triangulis rectangulis, sequitur de triangulato.

1. *Triangulatum est rectilineum compositum é triangulis.*

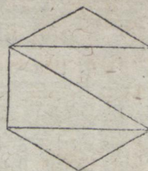
Antea (ut dichotomia servaretur) é linea factum est lineatum ad significandum genus superficiei & corporis, ita modo fit eadem de caussa é triangulo triangulatum ad exponendum genus quadrilateri & multilateri, & quidem justius etiam, quam antea in lineato. Triangula enim triangulatum componunt, non autem lineæ lineatum. Itaque

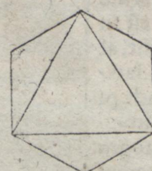
1. *Triangulati latera sunt binario plura triangulis.*

Ut quadranguli latera sunt 4, triangula ipsum quadrilaterum componentia 2: Quinquanguli latera 5, triangula 3. Sexanguli latera, 6 triangula 4, & sic deinceps, ut hic. & quidem minimum illud est.

Poteſt enim vel triangulum ſecari in triangula quamlibet multa. Quod autem angulis rectis interiores atque exteriores æquentur in quolibet rectilinei genere, patuit 4 e 6: interiores in quadrangulo æquantur 4, in quinquangulo 6, in ſexangulo 8,





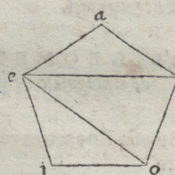
& ſic deinceps: Exteriores autem in quolibet rectilineo æquantur 4 rectis: Ut hic demonſtrari poteſt per 1 c 8 e 5, & per 9 e 6. Et

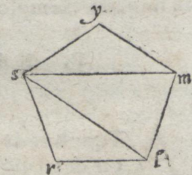
2. *Triangulata homogenea ſecantur in triangula æqua numero. é 20 p 6.*

Nam ſi quadrangula ſint, ſecantur in bina, ſi quinquangula in terna, ſi ſexangula in quaterna, & ſic deinceps.

2. *Triangulata ſimilia ſecantur in triangula ſimilia inter ſe & homologa totis. é 20 p 6.*

Ut in his quinquangulis. Primum particularia triangula ſunt ſimilia inter ſe. Nam *a e u* & *y s m* æqualium angulorum crura ſunt proportionalia ex theſi. Itaque triangula ipſa æquiangula ſunt per 9 e 7, ideoque ſimilia per 9 e 7. Atque ita de reliquis: media vero detractis æqualibus angulis, reliquos æquales angulos habebunt, ideoque æquiangula erunt & ſimilia per idem. Secundo trian-





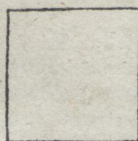
gula *a e u* & *y s m*, *e i o* & *s r l*, *e o u* & *s l m*, nempe ſimilia inter ſe, ſunt per 1 e 6 in duplicata ratione homologorum laterum *e u*, *s m*, *e o*, *s l*, quæ ratio eſt eadem propter communia latera. Itaque terna triangula ſunt in eadem ratione, ideoque proportionalia, & per tertiam compoſitionem, ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ſic totum quinquangulum ad totum.

3. *Triangulum eſt quadrangulum aut multangulum.*

Partitionis hujus partes in Euclide ſunt, ſine tamen partitionis ulla ſpecie, & ab angulis ſpecies hic item nominantur, ut ante, quamvis á lateribus eſſet verius, ut quadrilaterum aut multilaterum, ſed uſus in verbis ſequendus eſt.

4. *Quadrangulum quod comprehenditur á quatuor lineis rectis. 22 d 1.*

Ut hic. Poteſt vero & quadrāgulū eſſe ſphæricum & conicum & cylindraceum, & differētias illas cōmunes eſſe prædiximus. Et quadrangulum poteſt eſſe





planum,

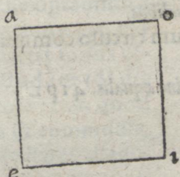
planum, quod non sit quadrilaterum, ut hic: sed tamen quadrangulum pro quadrilatero intelligatur è sua definitione.

5. *Quadrangulum est parallelogrammum aut trapezium.*

Partitio autem suis item partibus in elementis est sine partitionis forma: sed differentia partium commodius ita distinguetur, quia parallelogramma in universum communia multa sunt.

6. *Parallelogrammum est quadrangulum lateribus oppositis parallelum.*

ut in exemplo *ae* latus est parallelũ lateri *io* & *ei* latus est parallelum opposito lateri *ao*. Hæc definitio ab Euclide in definitionum catalogo prætérita est, & ex ea facta est 33 & 34 p 1. Attamen sic ad 36 p 1 ad 4 & 10 p 6 parallelogrammi definitio assumitur ab Euclide.



Itaque

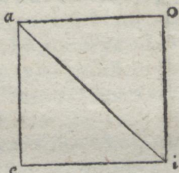
1. *Si rectæ eadem parte contermiment æquales & parallelas, parallelogrammum constituent.*

Quia ipsæ æquales erunt & parallelę, per 5 c 12 e 5.

Et

2. *Parallelogrammum oppositis & lateribus & angulis & sectis diametro segmentis æquatur.*

Ut in *aeio* opposita latera æquantur per 5 c 12 e 5, quia duæ rectæ cõterminant ęquales parallelas. De angulis diagonius *ai* ostẽdit: facit enim triangula *aei* & *ioa* æquilatera, ideoque æquiangula, cumque particulares anguli ad *a* & *i* sint æquales, totus toti æquatur. Hæc vero pars est 34 p 1. Segmenta vero semper æqualia sunt, sive triangula sint, sive quadrangula quælibet,



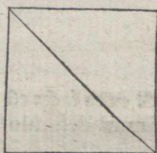
libet, ut in subjectis figuris. Diameter enim bisecat parallelogrãmum per angulos, aut per latera bisecta, aut per altera laterum segmenta æqualia. Et

3. *Diameter parallelogrammi bisecatur radiis æqualibus.*

Ut in tribus supra figuris *a e i* id etiam cum circulo commune est, ut patuit 17 e 4. Et

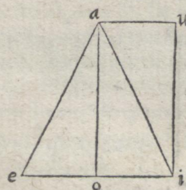
4. *Parallelogrammum est duplum basi & altitudine æqualis.* 41 p 1.

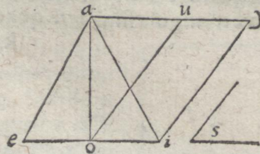
Sequitur cõparatio primum in ratione æqualitatis parallelogrammi cũ triangulo: Ut vides in diagrammate. Nam parallelogrammum bisecatur diametro in duo triangula per antecedentem. Itaque duplum est dimidii. Et



5. *Aequatur triangulo æquealto, basique duplo.* é 42 p 1.

Ut *a e i* triangulo æquatur parallelogrammum *a o i u*, quia dimidium parallelogrammi æquatur triangulo. Itaq; dimidiis æqualibus tota erunt æqualia. unde licet dato triangulo in dato angulo rectilineo parallelogrammum æquale constituere: ut hic dato triangulo *a e i* in dato angulo *s*, licebit





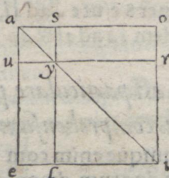
æquare

æquare parallelogrammum *ouyi*.

7. *Parallelogrammum constat é binis & diagonalibus & complementis, & gnomonibus.*

Hæ siquidem tres partes in geometricis rebus frequenter usurpantur, & ideo definiendæ fuerunt.

8. *Diagonale est particulare parallelogrammum communis anguli & diagonii cum toto parallelogrammo.*



Primo definitur diagonale: ut in toto parallelogrammo *aeio*, diagonalia sunt *auys*, *utylir*, quia sunt partes totius cõmunis & anguli ad *a* & *i* & diagonii *ai* cum toto: non quod tota diagonius sit communis, sed quod particulares diagonii sunt partes totius diagonii. Itaque diagonalia duo sunt. Hæc definitio diagonalis confusa est ab Euclide 24 & 26 p 6, ubi etiam τὰ περὶ διάμετρον παραλληλόγραμμα, quæ circa diametrum parallelogramma describit, quæ nos diagonalia uno nomine nominamus.

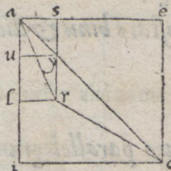
9. *Diagonale est toti simile similiterque situm é.24 p 6.*

Diagonalis nulla ratio vel proportio proponitur, similitudo tantum proponitur, ut in eadem figura diagonale *auys* simile est toti. Primo est æquiangulũ. Nam angulus ad *a* communis est, eique æqualis qui ad *y*, ideoque etiam æqualis opposito ad *i* per 3 c 5 e. Tum anguli *auy* & *asy* æquantur per 12 e 5 angulis oppositis interioribus ad *e* & *o*. Itaque æquiangulum. Est item proportionale cruribus æqualium angulorũ. Nam triangula *auy* & *aei* sunt similia per 9 e 7, quia *uy* parallela basi. Itaque ut *au* ad *uy*, sic *ae* ad *ei*, tum ut *uy* ad *ya*, sic *ei* ad *ia*. Item per 12 e 5, quia *sy* est parallela basi *io*, ut *ay* ad *ys*, sic *ai* ad *io*. Ergo æquiordinate ut *uy* ad *ys*, sic *ei* ad *io*: item ut *sy* ad *ya*, sic *oi* ad *ia*: & ut *ya* ad *as*, sic *ia* ad *ao*. Itaque æquiordinate, ut *ys* ad *sa*, sic *io* ad *oa*. Denique ut *sa* ad *ay*, sic *oa* ad *ai*, & ut *ay* ad *au*, sic *ai* ad *ae*. Itaque æquiordinate ut *sa* ad *au*, sic *oa* ad *ae*. Quare diagonale *su* est proportionale cruribus æqualium angulorum toti parallelogrammo *oe*. Demonstratio eadem fuerit, de diagonali *rl*. Similis autem situs patet per 2 c 14 e 4. Atque hinc etiam patet diagonale quadrati quadratum, oblongi oblongum, rhombi rhombum, rhomboidis rhomboides esse, quia toti simile similiterque situm. Diagonalia vero cum similia sint toti & similiter sita, erunt item similia inter se & similiter sita, per 3 c 14 e 4. Itaque

Si particulare parallelogrammum est toti coangulum, & simile similiterque situm, est diagonale. 26 p 6.

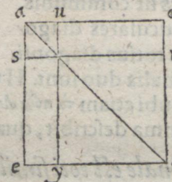
Assumi hoc potuit, sed etiam ut ab Euclide cogi potest, alioqui totum æqua-

retur parti, ut toti parallelogrammo *aeio* particula re*auys* sit coangulum, & communis anguli ad *a* simile toti similiterque sitū: dico esse diagonale. Secus esto diversa diagonius *aro* sit parallela *rl* contra *ae*. Itaque *alrs* erit diagonale per 6 e. Jam igitur per 8 e ut *ea* ad *ai*, sic *sa* ad *al*: item ex thesi ut *ea* ad *ai*, sic *sa* ad *au*: Itaque eadem *sa* ad *al* & *au* proportionalis est, & *al* æquatur ipsi *au*, totum parti.



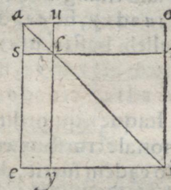
10. *Complementum est particulare parallelogrammum á contermimis diagonalium lateribus comprehensum.*

Ut in figura *ur* & *sy*, utrumque enim comprehensum est continuatis duorum diagonalium lateribus, & ideo complementa dicuntur, quia cum diagonalibus totum parallelogrammum complent. Neque vero diagonalia duo describi possunt, quin una compleměta describantur. Euclides nusquam complementum definit, sed 43 p 1 appellat τὰ τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων παραπληρώματα. Complementa parallelogrammorum circa diametrū, tanquam complementa diagonalibus reliqua sint ad complendum totum parallelogrammum.



11. *Complementa sunt æqualia.* 43 p 1.

Complementorū nulla proportio, nulla similitudo proponitur, sed ratio tantum, ut in figura *ur* & *sy* cōplementa sunt æqualia. Nam triangula *aei* & *aoi* æquantur per 3 c 5 e: item *asl* & *aul*, item *lyi* & *lri*. Itaque si triangula utrinque æqualia detraxeris ab æqualibus, relinques æqualia complementa.

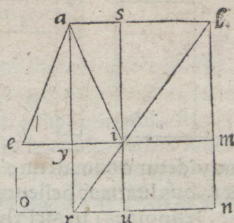


Itaque

1. *Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo, reliquum ad datam rectam comparatum eidem pariter æquabitur.* 44 p 1.

Ut si postules parallelogrammum ad datam rectam, & in dato angulo rectilineo æ-

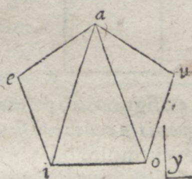
neo æquale dato triangulo, proposito satisfaciet. Sit triangulum *aei*, & datus angulus *o* data recta *iu*, & parallelogrammum *ayis* æquale triangulo in dato angulo per 5 c 6 e, tum latus *ay* æqualiter ipsi datæ *iu* continuetur in *r*, & connectatur *ru* & ab *r* diagonius concurrat cum *as* infinita, idque in *l* per c 11 e 5, lateraque *yi* & *ru* continuentur æqualiter ipsi *sl* in *m* & *n*, & connectatur *l n*. Hoc complementum *m u* æquatur complemento *ys* æquanti datum triangulum per præcedentem, & in dato angulo rectilineo.

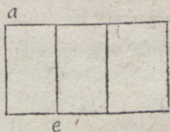


Et

2. *Si parallelogramma continenter æquentur triangulis dati triangulati in dato angulo rectilineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur.* 45 p 1.

Est consectarium superioris de ratione parallelogrammi cum triangulato, neque demonstrationem præterea ullam requirit, sed manum promptam in describendo. Rectam vero tibi sumes infinitam, ad quam continues particularia parallelogramma, ut si detur triangulatum *aeiou* solvetur in tria triangula *aei*, *aio*, *aou*, & angulus sit *y*, primum in dato angulo ad rectam infinitam facies per antecedentem parallelogrammum *ae* in dato angulo æquale primo triangulo. Deinde secundum triangulum ita describes super infinitā, ut crus alterum incidat in latus complementi æqualis, reliquum in antecedētia rejiciatur, & sic deinceps. Hic habes complementa tria cōtinuata, & parallelogrammum continuantia, sed præstat in fabricando delere antecedentia, & altera inferiorum diagonalium latera, ne quid interea cōfusio linearum officiat.





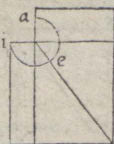
Itaque

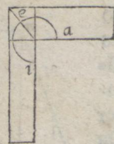
Parallelogrammum æquatur suis diagonalibus & complementis.

12. *Gnomo est alterum diagonale cum duobus complementis.* 2 d 2.

Gnomo duplex est in duobus exemplis, & sic Euclides definit. Omnis parallelogrammi spatii circa diametrum ipsius parallelogrammum quodlibet cum duobus complementis gnomo vocetur. Itaque gnomo componitur ex utroque ge-

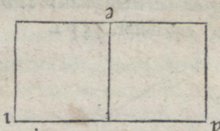
que genere diagonaliũ & complemẽtorum. Gnomonis autem usus in elementis nullus alius videtur quam ut uno nomine tres partes parallelogrammi significentur, & tribus literis appellentur, ut hic *aei*. Alioqui gnomõ est perpendiculum, & sic Oenopides (ut ait Proclus 12 p 1) perpendiculum dicebat pro gnomone more antiquo.





13. *Parallelogramma æquealta sunt ut bases.* 1 p 6.

Ut patet per 12 e 4. Quia sunt dupla triangulorum per 2 c 5 e figurarum primarum: Ut *ae* & *ei*. Itaque

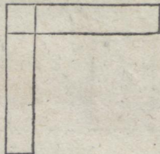


Parallelogramma æquealta in æquali basi sunt æqualia. 35. 36 p 1.

Ut patet in eodem exemplo.

14. *Si parallelogramma æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra.* 15 p 6.

Consectarium est ex 8 e 7. Ut hic vides, & tamen & illud (ut dictum est) & hoc consectariũ potius est 13 e 4, quod hic etiam manifestius est. Itaque



1. *Si quatuor rectæ sunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum.* é 16 p 6.

Erunt enim parallelogramma æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli. Et

2. *Si tres rectæ sint proportionales, parallelogrammum mediæ æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum.*

Consectarium est é proximo.

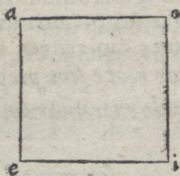
P. RAMI

de rectangulo.

Parallelogrammum est rectangulum aut obliquangulum.

Adhuc de parallelogrammis communia & generalia præcesserunt: specialia sequuntur in rectangulis & obliquangulis, quæ differentia (ut prædixi) est communis triangulis & triangulatis, sed hic nulla verbis saltem aptior ad genera proposita distinguendum.

2. *Rectangulum est parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos.*



Ut in *aeio*. Atque hinc intelligis ex uno angulo recto omnes rectos esse. Angulus enim ad *a* rectus opposito ad *i* æquatur per 2 c 6 e 10: ideoque ambo recti per c 8 e 3. Reliqui anguli ad *e* & *o* per 4 e 6 æquales duobus rectis, & æquales inter se per 2 c 6 e 10. Itaque singuli recti. Neque omnino in parallelogrammo rectus angulus esse potest, quin omnes recti sint.

Itaque

1. *Rectangulum comprehenditur á duabus rectis angulum rectum comprehendentibus.* 1 d 2.

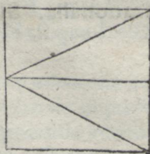
Hæc Euclidis definitio comprehensionis verbo geometricam multiplicationem quandam significat: ut enim é duobus numeris inter se multiplicatis fit numerus, sic é duobus lateribus in se ductis fit rectangulum, nec tamen rectangulum quodlibet est rationale, ut antea patuit 9 e 4, & postea patebit 5 e.

Et

2. *Rectangula quatuor complent locum.*

Neque omnino interest, æqualia, inæqualia, æquilatera, inæquilatera, homogenea, heterogenea sint quatuor. Quoquomodo enim versentur, anguli recti erunt: ideoque complebunt locũ. Neque hic Aristotelis τετράγωνον accipere possumus, nisi rectangulum generaliter intelligat.

3. *Si diameter bisecat latus rectanguli, recte secat: & contra.*



Ut hic patet per 1 e 7 ductis diagoniis bisegmentorum: cõversa patet per 2 e 7, & 10 e 6.

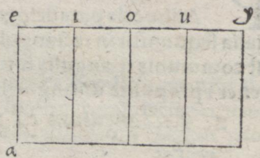
Itaque

I

Sim-

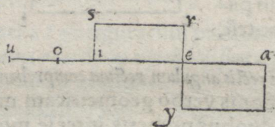
Si inscripta recte bisecat latus rectanguli est diameter. Quia bisecat parallelogrammũ.

4. *Rectangulum æquatur rectangulis ex ipsius uno latere & reliqui segmentis.* 1 p 2.



Ut hic rectangula quatuor particularia toti æquantur, quæ fiunt ex *a e* uno ipsius latere, & segmentis reliqui *e i, i o, o u, u y*, cujus demonstratio é congruentia est, quia totum partibus congruit. Sed eadem ratio in numeris clarior est inductione partium, ut quater octona, sunt 32, frango 8 in 5 & 3, quater quina sunt 20, & quater terna 12, totum est 32, deniq; tota arithmetica multiplicatio ex totis numeris idem facit ac multiplicatio totius per alterius partes, imo partium per partes. Hæc propositio appellatur 9 cap. 1 constr. á Ptolemæo.

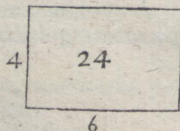
5. *Si quatuor rectæ sint proportionales, rectangulum mdeiarum æquatur rectangulo extremarum.* 16 p 6.



Est é 1 c 14 e 10, sed frequẽter speciale cõsectariũ hoc appellatur nomine rectanguli. Ut hic sunt quatuor proportionales *a e, e i, i o, o u,* & ab extremis *a y* rectangulum, é mediis sit *s e*.

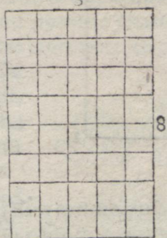
6. *Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus.* 16 d 7.

Figura rationalis definita est 9 e 4, qualis é rectilineis adhuc nulla fuit, prima est parallelogrammum rectangulum neque quodlibet, sed illud solum, cujus basis altitudini est rationalis, ratioque basis & altitudinis explicabilis est numero, ubi & figuratus definitus est. Rectangulum aũt ex irrationalibus lateribus, qualia 8 e 1 dicta sunt, est irrationale. Rationale itaque rectangulum é rationalibus lateribus accipitur, & ejus figuratus nomine generis appellatur planus, quia é toto planorum genere hæc sola species est rationalis. Si igitur rectanguli basis est 6, altitudo 4, area est 24, & si constet aream esse 24, & basim 6 esse, constabit altitudinem esse 4: exemplum sic est.



Atque hæc multiplicatio ut patuit ad c 9 e 4 geometrica est, ut si multiplicies 5 per 8, facis 40 planum, & latera plani sunt

ni sunt 5 & 8, tanquam fecisses parallelogrammum rectangulum pedum quadratorum 40, cujus basis esset 5 pedum, altitudo 8, hoc modo: hæc inquam muplicatio est geometrica, nec ex lineis lineæ, ut illic ex unitatibus unitates, sed intervallo uno superior magnitudo creatur, superficies nempe. Hinc etiam patet geodæsia rectanguli trianguli. Nam cum crura recti anguli inter se multiplicaveris, facis totum parallelogrammum rectangulum, cujus dimidium est triangulum per 3 c 6 e 10.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XII.
de quadrato.

R*Ectangulum est quadratum vel oblongum.*

Hæc partitio fit verbis propriis, at res & differentia subjecta est communis ex angulis & lateribus.

2. *Quadratum est rectangulum æquilaterum.* 30 d 1.

Ut hic vides *aeio*. Quadratum itaque cum sit æquilaterũ, & rectis æqualibus ęquiangulũ, é quadrangulis erit ordinatum. Latine vero distinctius quadratũ dicitur quã græce τετράγωνον id est quadrangulum, quod generale & quadrilateris omnibus commune.



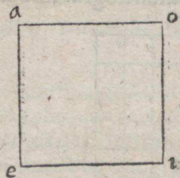
1. *Latera quadratorum æqualium sunt æqualia.*

2. *Potentia rectæ est quadratum.*

Δύναμις potentia verbum est Euclidi libro decimo usitatum. Dicitur autem linea recta posse quadratum, quia in se ipsam ducta facit quadratum. Potentia porro ista ut Aristoteles ait 5 & 9 phil. dicitur κατὰ μεταφοράν.

3. *Si duæ conterminæ perpendiculares æquales claudantur parallelis, constituent quadratum.* 46 p 1.

Ut in *a e i o* perpendiculares *a o* & *e i* æquales claudantur parallelis *a o*, contra *e i* & *o i* contra *i e* constituent quadratum *a e i o*. Parallelogrammum enim est ex thesi, quia opposita latera parallela, & rectangulum, quia cum angulus perpendicularium *a e i* sit rectus, omnes recti erunt per 2 e 11. Deinde unum latus *e i* æquatur omnibus, primum opposito *a o* per 6 e 10, & ipsi *e a* per thesin, ideoque opposito *o i* per 6 e 10.



3. *Planus quadrati est planus æquilaterus.*

Est 18 d 7 paulo secus exposita. Quadratus numerus est, qui est æqualiter æqualis, vel qui comprehenditur à duobus æqualibus numeris. Est vero quadratum ex omnibus planis imprimis rationale, non tamen semper, sed tantũ rationale est cujus numerus est quadratus. Itaque quadrata numerorum non quadratorum non sunt rationalia.

Fit à numero in se ipsum multiplicato.

Quales quadrati sunt primi novem 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. à semel uno, bis binis, ter ternis, quater quaternis, quinquies quinis, sexies senis, septies septenis, octies octenis, novies novenis. Atque hæc summa est quadrati numeri genesis & inventio per multiplicationem è dato latere. sed eadem inventio subtilius multisque elementis ab Euclide proponitur, à quo si cui hinc utilitas ulla speretur, licebit repetere. sequitur varia comparatio quadrati cum rectangulo, cum quadrato, cum rectangulo simul & quadrato. Ratio cum rectangulo primum est.

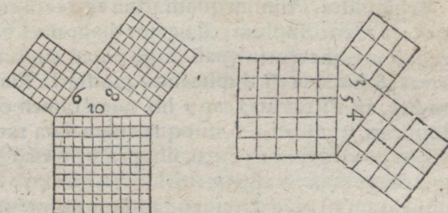
4. *Si tres rectæ sunt proportionales, quadratum mediæ æquatur rectangulo extremarum: & contra.* 17 p 6 & 20 p 7.

Consectariolũ est è 2 c 14 e 10: Ut in *a e*, *e i*, *i o*. Cõsectarium item hoc quadrati nomine infinite citatur, ut superius illud de rectangulo.

5. *Si basis trianguli subtendit rectum, æque potest cruribus: & contra.* 47 & 48 p 1.

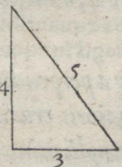
Comparatio quadrati deinceps est cum quadrato, primum ratio est æqualitatis

litatis é 5 e 8, consectarium quidem, sed tamen consectarium mirifice celebrantem á Pythagoreis, tanquam mater hjuus nondum nata & inventa esset. Et cõsectarium infinite quadrati nomine citatum præ generali: ut permirum sit filiæ & parentem & honorem tantopere celebrari, matris autem parentem & honorem silentio sepeliri. De Pythagorea exultatione dictum est in proœmio mathematico. Atqui consectariũ hoc aliquando rationale numeroq; explicabile, sed in triangulo vario tantum. Nam trianguli rectanguli æquicruri latera sunt irrationalia: varii autem aliquando rationalia, & quidem modo duplici, altero Pythagoræ, altero Platonis, ut Proclus author est ad 47 p 1. Pythagorea ratio sic est ex impari numero.



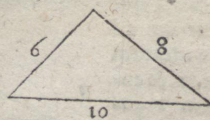
1. *Si quadratus imparis pro crure primo dati minuatur unitate, dimidius reliqui erit crus alterum, auctus unitate erit basis.*

Ut in exemplo laterũ 3. 4. 5. Quadratus basis 5 est 25 æqualis quadratis 16 & 9 é cruribus 4 & 3. Pythagorei vero in hac invẽtione sibi præcipue placuerunt, eaque de caussa 5 invictus numerus ab iis dicebatur, tanquã basis illa victrix esset, crura vero debellata, ut Alexander ait primo philosophiæ. Platonica sic est é numero pari.



2. *Si dimidius paris pro crure primo dati quadretur, quadratus minutus unitate erit crus alterum, auctus unitate erit basis.*

Ut in exemplo laterum 6.8.10. Nam basis 10 quadratus 100 æquatur quadratis 36 & 64 é cruribus 6 & 8. Ex hac ratione rationalium potentiarum (ut Vitruvius ait lib. 9 cap 2) normam exactissimam fabricari Pythagoras docuit tribus regulis in trianguli speciem compositis, quæ sunt ut 3. 4. 5. Hinc architectura in scalarum partibus arithmeticam proportionem didicit. Ea namque ratio quemadmodum in multis rebus & mẽsuris est utilis etiam in ædificiis, scalarũ ædificationibus, ubi tẽperatas habeant graduum librationes, est expedita. Sic enim altitudo contignationis ab summa coaxatione ad imum libramentum divisa fuerit in partes tres, erit earum quinque in scalis scalporum iusta longitudinis inclinatio. Nam quam magnæ fuerint inter contignationem & imum li-



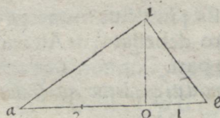
bramentum altitudinis partes tres, quatuor à perpendiculo recedant, & ibi collocentur interiores calces scalporum. Ita enim erunt tẽperatæ graduum & ipsarum scalarum collocationes.

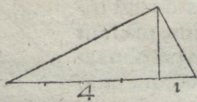
3. *Diagonius potest duplum lateris, eique est asymmetra.*

Ut hic vides. Primum quadratum esto *a e i o*, ex cujus diagonio *a i* fiat quadratum *a i u y*, erit duplum, cũ nempe diagonius potest æquale utrique cruri æquali. Ergo potest duplum alterius, & hæc via est duplicandi quadrati à Platone tradita, ait Vitruvius 1 cap 9 lib. quod tamen etiam duplicari, triplicari, omninoque etiam data ratione augeri potest per 1 c 15 e 4, ut illic prædictũ est. Quod autẽ diagonius sit asymmetra lateri est 116 p 10. Argumentum est quia daretur quadratus numerus duplus quadrati numeri. Quod Proclo 2 cap 2, Theonique & Campano ad 116 p 10 impossibile per se clarum visum est. At illud clarius est in libello de lineis individuis Aristoteli attributo. Quia par esset impar. Nam si diagonius sit 4 latus 3, quadratum diagonii 16 duplum erit ad quadratum lateris, & ita quadratum lateris erit 8, & idem erit 9 nempe ex 3, sicque par esset impar. Hanc asymmetriam Aristoteles frequẽter appellavit, ut illam de tribus angulis duos æquantibus. Huc addi possit illud ad 42 p 10. Segmenta rectæ varie sectæ magis inæqualia majus posse.

6. *Si basis trianguli rectanguli secatur à perpendiculari ex angulo recto dupla ratione, potest sesquialterum majoris cruris, triplum minoris: si quadrupla, sesquiquartum majoris, quintuplũ minoris, ad 13. 15. 16 p 13.*

Ut in *a e i* basis *a e* segmentum *a o* sit duplũ ad segmentũ *o e*, nempe 2 ad 1. Id enim esto secari dupla ratione, ut deinceps quadrupla, tota erit sesquialtera ad *a o*, ideoque per 3 c 4 e 8, & 1 c 15 e 4, quadratum ex *a e* sesquialterum ad quadratum ex *a i*, & eodem argumento triplum ad quadratum ex *e i*. Reliqua de quadrupla sectione patent in subjecta figura simili argumento.

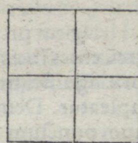


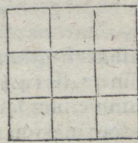


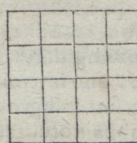
7. *Si recta est secta quodlibetfariam, potest multiplex segmenti cognomine quadrato numeri sectionis.*

Sic

Sic bisecta poterit quadruplũ dimidii cognomine quaternario, quadrato binarii secundum quem fit bisectio, sic trisecta poterit nuncuplum trientis, quadrisecta sedecuplum quadrantis: Ut hic vides. Hoc Theoni postulatur in demonstratione 18 p 13. Qualis progreſsio est in similibus & planis & solidis in Eratosthenis epistola ad Ptolemæum, é ratione homologorum laterum æquemultiplicata dimensionibus.

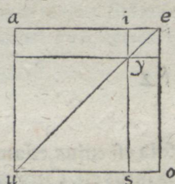






8. *Si recta est secta in duo segmenta, quadratum totius æquatur quadratis segmentorum duplici rectangulo utriusque. 4 p 2.*

Tertia ratio quadrati deinceps est cum duobus rectãgulis & duobus quadratis primo æqualitatis. Consectarium est é 3 c 11 e 10, quia parallelogrammum æquatur diagonalibus & complementis. Si recta *ae* secta sit in *i* facit quadratum *aeuo* majus quam segmentorum *ai* & *ie* quadrata *uy* & *ye* duplici rectangulo *ay* & *yo*.



Itaque

Latus primi diagonalis est latus alterius complementi, & duplicatum est latus simulutriusque: reliquum autem latus simulutriusque est latus reliqui diagonalis.

Hæc ratio est quadrati cum rectangulo & quadrato. Quadrati autem numero propositi latus sæpe quæritur. Itaque per proximum elementum, & ejus consectaria analysis quadrati lateris instructa est. Quæratur igitur latus jam propositi quadrati, & genesis ante spectetur, qualem hic é numerorum multiplicatione in numeris ipsis vides.

```
    10  2
    10  2
    ------
     2  4
     2  0
  1  0  0
  -------
  1  4  4
```

Hæc

Hæc ratio est quadrati cum rectangulo & quadrato, unde habetur analysis quadrati lateris explicabilis numero. Eadem siquidem via est Thebis Athenas, quæ Athenis Thebas: Et hic geometricæ analyseos usus superest, ut postea in cubo, cum alius in totis elementis nullus sit. Hic igitur primo notabis quadratos singulares sinistrorsum ab ultima nota crescentes locis imparibus, & deinceps uno intermisso desinere, sic 144, hæ notæ significant quod singularia latera sint colligenda, ut universum latus compleatur. Deinde quod primis exemplis notum est, quadrati maximi in primum punctum desinentis, latus pro quoto adnota, & ipsum quadratum à numero in idem punctum desinente subducito, latus erit 1, nec quicquam restabit, sic 144 (1: hæc primi lateris singularis est inventio: Secundo duplica latus jam repertum, fient 2 & subjice sequenti plano 4 ex duobus planis facto, quia latus est amborum planorum in unum compositorum, & per hoc latus divide totum planum, evenit 2 pro secundo quoto, reliquum nempe ejusdem plani latus: quod quia latus est etiam quadrati sequentis, subjicito sequenti puncto tanquam divisoris notam: facta multiplicatione dividentium notarum & factorum subductione nihil restabit. Sic erit exemplum totum.

1 4 4
1 2 2 (12
4 4

Quare hac numeratione divisio plani sola est cujus, etiam latus negligitur & tantum quæritur, quia quadrati sequentis latus est. Quæratur latus 15129. Primo notato impares locos, sic 15129. Deinde quadrati maximi in primum punctum desinentis latus adnotato & lateris quadratum subducito, nihil restat. sic

15129 (1
1

Secundo repertum latus 1, duplicatum subjicito plano sequenti 5, & per illud dividito ipsum planum, eveniet 2, reliquum latus adnotandum in quoto secundo loco post jam repertum latus, & subjiciendum sequenti puncto peracta factorum subductione, manebunt 7. sic

7
15129 (12
22
44

Hæc secunda singularis lateris est inventio. Tertio reperta latera duplicentur velut unum, & unius præcedentis quadrati. Quamvis enim in universi quadrati la-

drati latere retexendo quadrati singularis duobus plures incidant: attamen duo tantum considerantur, & præcedentium omnium latera pro unius quadrati latere numerantur. Ergo reperta latera velut unum duplicentur, fient 24, & subjiciantur plano sequenti 72, planus divisus dabit 3, reliquum plani latus adnotandum tertio loco post reperta latera, & subjiciendum sequenti puncto, facta subductione nihil restabit.

7
15129 (123
243
729

Aliquando post quadratum jam repertum locis proximis, nec planus nec quadratus est ullus. Itaque latus ejus singulare erit 0: ut in quadrato 366025, latus universum est 605, ex tribus lateribus singularibus, quorum medium est 0. Aliquando etiam planus intermedius partem sequentis quadrati continet. Itaque si latus reliquum majus sit latere quadrati sequentis æquandum est, ut quæratur latus quadrati 784, primi quadrati latus erit 2, & supererunt 3 sic.

3
784 (2
4

Tum latus idem duplicatum subjiciatur plano sequenti 38, planus divisus daret 9 pro reliquo latere: at hoc latus majus esset latere sequentis quadrati: minuatur igitur 1, & pro latere 9 sumatur 8 latus, & adnotetur, sequentique quadrato subjiciatur, facta subductione nihil manet.

3
784 (28
48
384

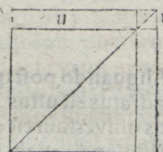
Atque hinc patet inventio medii proportionalis inter duos datos numeros, si quis tamen est. Nam si factus á duobus est quadratus, latus quadrati est medium inter datos, ut patet per auream regulam, si propositus numerus non est quadratus. Arithmeticum latus & numero explicabile nullum reperietur, & hic numerus figuratus est umbra figuræ geometricæ, nec assequitur, neque tale quadratum est rationale: Quadrati tamen in eo maximi numerabile latus inveniri potest: ut in 148, numerus quadratus 144 continetur, & latus ejus est

 12, super-

12, superſunt vero 4. Latus igitur talis numeri non quadrati exactum nullum eſt, nec ullum unquam tam vero propinquum reperietur, quin vero propius poſſet inveniri. Itaque eſt inexplicabile numero. Duo hujuſce inventionis modi ſunt, alter per gnomonis additionem, alter per dati numeri non quadrati reductionem ad partes majoris alicujus nominis.

Si latus inventum duplicetur, & duplicato unitas addatur, totus erit gnomo proxime majoris quadrati.

Nam latus eſt complementũ alterum, & duplicatum eſt ſimul utrumque, unitas autem eſt ultimum diagonale: Ut hic vides circumponi gnomonẽ quadrato priori, eamque differentiam eſſe quadrati majoris á minore, ubi Ariſtotelis gnomo additus quadrato auget, non mutat ſpeciem: quod perpetuo verum eſt, ſi majoris quadrati gnomo addatur proximo minori quadrato tanquam diagonali. Itaque ut gnomo habeatur pro reliquo nominatore duplicatur inventum latus pro duplicato complemento, & unitas additur pro diagonali. Sic latus numeri 148 eſt $12\frac{4}{25}$, cujus ratio pẽdet ex eadem propoſitione, unde & latus integrum invenitur. Cum enim latus unijuſcujuſque quadrati proximo minoris tantum diſtet unitate á latere proximo majoris quadrati, eadem unitas & bis in quadrati præcedentis latus & ſemel in ſeipſam ducta gnomonem majoris lateris quadrato adjicit: Nã quadratũ facit 169. Quo intelligitur quãtũ numerator 4 abeſt á nominatore 25, tantũ gradatũ 148 abeſſe á proximo majore quadrato. Nã ſi addas 21, quo abeſt 4 á 25 facies quadratũ 169, cujus latus eſt 13. Secũdus modus eſt per reductionem ad datas partes magni nominis, ut centeſimas, milleſimas, aut minutiores alias, & quidem quadratas, ut earum latus certum jam conſtet. Quanto autem minores fuerunt, tanto propius vero latus invenietur. Sit idem exemplum 148 reductum ad centeſimas quadratas $\frac{1480000}{10000}$ nominatoris latus eſt 100: numeratoris autem 1216, & ſuperſunt 1344, ſic $\frac{1216}{100}$ id eſt $12\frac{16}{100}$, vel $\frac{4}{25}$ quod primo etiam modo patebat. Sed in latere numeratoris præter 1216 ſuperſunt 1344, quo tantulo modus hic eſt accuratior priore: reliqua tamen iſta negliguntur, quia ne unam quidem centeſimam invento lateri poſſunt addere, neque enim $\frac{1344}{2426}$ faciunt unam centeſimam. Atque etiam in minoribus partibus ſecundus modus præter reliqua monſtrat latus aliquanto majus latere per primum modum reperto, ut in 7 latus eſt per primũ modum $2\frac{3}{5}$: At per ſecundum modum latus 7 reducti ad quadratas milleſimas, id eſt $\frac{7000000}{1000000}$ id eſt $\frac{2645}{1000}$ & ſuperſunt 3975. At $\frac{645}{1000}$ ſunt majores $\frac{3}{5}$. Nam $\frac{3}{5}$ reductæ ad 1000 ſunt. $\frac{600}{1000}$ Itaque ſecundus modus in hoc exemplo ſuperat primum $\frac{45}{1000}$, neglectis etiam reliquis 3975. Ergo hæc analyſis eſt quadrati lateris é prima ratione quadrati duplici & rectangulo & quadrato æqualis.



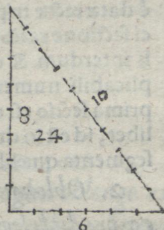
Triangu-

Trianguli Geodæsia.

Trianguli cujuscunque geodæsia generalis una est apud Heronem laterum additione, subductione, multiplicatione, & quadrati lateris inventione hoc modo.

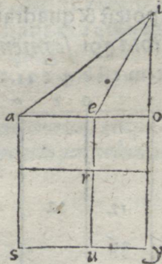
9. *Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continue facti è dimidio & reliquis erit area trianguli.*

Ut latera trianguli *aei* collecta sunt 24, dimidium 12, unde subductis lateribus 6.8.10, reliqua sunt 6.4.2: jam fac continue primo 72 è 12 & 6, secundo 288 è 72 & 4: tertio 576 è 288 & 2. Latus cõtinue facti 576 est 24 area trianguli. Geodæsia ista generalis facillima & expeditissima est, si latera integro numero numerentur, quamvis si caussam requiras ænigmati potius, quã theoremati germana sit. Itaque demonstratio ejus in Herone nulla est. Jordanus & Jordano posteriores demõstrare conati sunt, sed obscure & per stereometriam, quam etiam continuatio multiplicationis é dimidio & reliquis in ipso theoremate videtur indicare. Demonstrationem itaque hanc rejecimus in scholas ad finem ultimi libri, si quis requirat. Specialis autem geodæsia trianguli rectanguli jam dicta est, sed obliquanguli postea dicetur. Sed generalis longe præstantior: Nam reductione obliquanguli multæ fraudes accidunt, ut lepido voto ardanus tantum Cagri optasse videatur quantum pseudographia ista deperiret.



10. *Si basis trianguli subtendit obtusum, plus potest cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo continuationis ad verticis perpendicularem.* 12 p 2.

Comparatio quadrati cum duobus item rectangulis & totidem quadratis est, sed inæqualitatis. Ut in triangulo *aei* basis *ai* quadratũ majus est, quam quadrata crurum *ae* & *ei* duplici rectangulo *ar*, quod fit ex altero crure *ae* & continuatione *eo*. Nam per 5 e quadratum ex *ai* æquatur quadratis ex *ao* & *oi* id est tribus quadratis, ex *io*, *oe*, *ea*, & duplici dicto rectangulo. At quadrata crurum *ae* & *ei* æquantur quadratis tribus illis ex *ae* nempe suo & ex *ei* duobus, primo *io*, secundo ex *oe* per 5 e. Itaque excessus restat duplicis rectanguli.

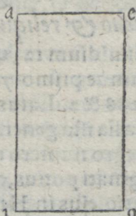


P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIII.

de oblongo.

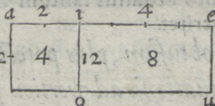
Oblongum est rectangulum inæquilaterum. 31 d 1.

Ut hic *a e i o*. Hæc rectanguli species secunda in elementis ad solam definitionẽ propriè nominatur ab Euclide. Ratio oblongorum copiosa est è datæ rectæ triplici sectione rationali interdum & explicabili numero, prima sectio est utlibet, id est in duo segmenta quælibet æqualia vel inæqualia: unde ratio quadruplex oritur.



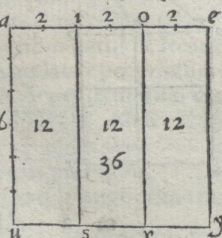
2. *Oblongum è tota & segmento æquatur rectangulo segmentorum, & prædicti segmenti quadrato.* 3 p 2.

Cõsectariũ est e 4 è 11. Rectangulũ enim segmentorũ & quadratũ sunt ex altero latere & reliqui segmẽtis. Ut recta *a e* secta sit in *a i* 2 & *i e* 4, rectangulũ 12 ex *a e* 6 & *a i* 2 æquatur rectangulo *i u* 8 è segmentis *a i* & *i e*, item quadrato *a o* 4 è prædicto segmento *a i*: rectangulum autem hic ideo proponitnr, quia potest & quadratum esse, si linea nempe sit bisecta. *Secundo.*



3. *Oblonga è tota & segmentis æquantur è tota quadrato.* 2 p 2.

Consectarium item est è 4 e 11. ut recta *a e* 6 secta sit in *a i* 2, *i o* 2, *o e* 2, oblonga 12 *a s*, 12 *i r*, 12 *o y*, è tota recta *a e*, illisque segmentis æquatur quadrato *a y* è tota:



Hic segmenta duobus plura sunt, & tamen à primo reliqua pro uno sumi possunt, cum

ſunt, cum rectangulum particulare item ſit cum illis æquale. Hæc propoſitio adhibetur ad *6 e 18*.

4. *Oblonga duo é tota & ſegmento cum tertio quadrato reliqui ſegmenti æquantur quadratis totius & prædicti ſegmenti. 7 p 2.*

Ut recta *a e* 8 ſecta ſit in *a i* 6 & *i e* 2, oblonga *a o* & *i u* é tota & ſegmẽto 2 ſunt 32: quadratum 8 é 6 reliquo ſegmento eſt 36, totumque 68, totus autem *a e* 8 quadratum eſt 64, & prædicti ſegmenti 2 eſt 4, ſummaque eadem 68.

5. *Baſis trianguli acutanguli minus poteſt cruribus duplici oblongo ex altero crure & ejus ſegmẽto á dicto angulo ad verticis perpendicularem. 13 p 2.*

Ut in triangulo *a e i* ſumatur angulus ad *i* acutus. Hic per 4 e oblonga duo ex *e i* & *o i* cum quadrato *e o* æquantur, quadratis ex *e i* & *o i*, commune addatur quadratum ex *a o*. Hic quadratum ex *e i* cum quadratis ex *i o* & *o a*, id eſt per 5 e 12 cum quadrato ex *i a* æquatur duobus oblongis ex *e i* & *o i* cum duobus quadratis ex *e o* & *o a*, id eſt per 5 e 12 cum quadrato ex *e a*. Itaque duo oblonga cum quadrato baſis æquantur quadratis crurum, vinciturque baſis á cruribus duobus oblongis. Atque hinc habetur perpendicularis in triangulo.

Itaque

Si quadratum baſis acuti anguli tollatur é quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diviſo, quotus erit ſegmentum dividentis á dicto angulo ad verticis perpendicularem.

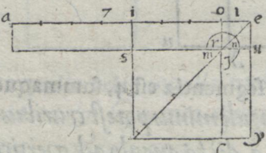
Ut in triangulo acutangulo *a e i* ſunto latera 13. 20. 21. & *a e* ſit baſis acuti, quadratum ejus erit 169, quadrata crurum *a i* & *e i* addita 841, & inde ſublato quadrato 169 relinquuntur 672, dimidium 336, quo diviſo per 21 quotus erit 16, ſeg-

 mentum

mentum dividentis cruris *ei* ab angulo *aie* ad verticis perpendicularem *ao*: reliquum itaque segmentum erit 5: Jam de 169 quadrato basis 13, tollatur 25 quadratum è minoris segmento 5, relinquentur 144 pro quadrato perpendicularis per 5 e 12. Hic inventa perpendicularis & latus sectum latera sunt rectanguli, cujus dimidium erit area trianguli, ut hic rectangulum è 21 & 12 erit 252, dimidium 126 erit area trianguli. Hoc Theon paulo tamen secus in 6 lib. magnæ cõstructionis: sequitur secunda sectio, unde quarta existit ratio.

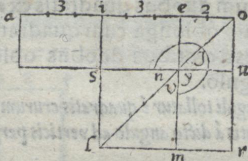
6. *Si recta est bisecta, secusque oblongum inæqualium segmentorum cum quadrato intersegmenti æquatur quadrato bisegmenti.* 5 p 2.

Ut recta *ae* 8 sit bisecta in *ai* 4, & *ie* 4, secusque in *ao* 7 & *oe*, oblongum ex 7 & 1, cum 9 quadrato intersegmenti *io* 3 id est 16. æquatur 16 quadrato bisegmenti *ie* 4. Quod etiã geometrice patet completo diagrãmate. Nam *as* parallelogrammum ipsi *iu* parallelogrammo per 13 e 10 æquatur, & ideo per 11 e 10 ipsi *oy*. Nam complementis æqualibus commune est *ou*. Itaque si communes *so* addatur utrique, oblongum *ar* æquabitur gnomoni *mnJ*, quadratum autem intersegmenti est *sl*. Quare oblongum segmentorum inæqualium *ar*, cum quadrato intersegmenti *sl*, æquatur quadrato intersegmenti *iy*. Tertia sectio deinceps est, unde quinta est ratio.



7. *Si recta est bisecta & continuata, oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti æquatur quadrato compositæ ex bisegmento & continuatione.* 6 p 2.

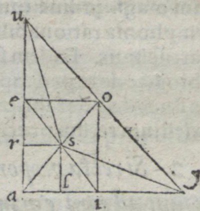
Ut recta *ae* 6 bisecta in *ai* 3 & *ie* 3 & continuata in *eo* 2, oblongum 16 ex 8 continuata & continuatione 2 cum 9 quadrato bisegmenti id est 25, æquatur quadrato 25 ex 3 bisegmento & continuatione 2 id est è 5: geometrica item conclusio hic fuerit, ut prius. Nam *as* per 13 e 10 æquatur ipsi *iy* & per 11 e 10 ipsi *yr* complemento: æqualibus addatur *so*, Jam oblongum *au* æquabitur gnomoni *nJu*. Denique æqualibus addatur quadratum bisegmenti. Oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti æquabitur quadrato compositæ è bisegmento & continuatione. Atque rationes hæ fuerunt oblongi cum rectangulo. Hinc existit mesographus Heronis mechanici seu mesolabus dictus ab inventione



inventione duarum continue mediarum proportionalium inter duas datas: unde existit problema deliacum quod Apollinem ipsum exercuit. Mesographus autem Heronis est infinita regula, quæ sistitur cochleato ûnco per cavum mobili, est vero ut Pappus ait initio libri tertii mesographus iste architectis aptissimus, multoque promptior Platonis mesographo: mesographi mechanica est apud Eutocium secundi de sphæra, sed paulo facilius á nobis ita proponetur.

8. *Si duas datas rectas comprehendentes rectangulum, & infinite continuatas mesographus tangens oppositum angulum angulo datarum intersecet æquidistanter á centro, intersegmenta erunt media continue proportionalia datis.*

Ut datas rectas *ae* & *ai* comprehendentes rectangulum *ao* & continuatas mesographus *uy* tangens angulum *o* oppositum angulo datarum intersecet æquedistanter á centro: Centrum quidem concursus diagoniorum *ao* & *ei* ostendet in *s*: ad æquidistantiam autem á centro volvendus est mesographus, & adhibendus circinus, & hoc mechanicum nullo principio geometriæ certo adhuc inventum est, ut protinus actione prima æquidistantia deprehendatur. Sint igitur æquidistantiæ pũcta *u* & *y*. Dico intersegmenta esse media: utque *ae* est ad *iy*, sic *iy* esse ad *eu*, sic *eu* ad *ai*. Primum esto á centro *s* perpendicularis *sr* in latus *ae* bisecabit latus *ae* per 3 e 11. Itaque per 7 e oblongum ex *au* & *ue*, cum quadrato *re* æquatur quadrato *ru*, assumptoque communi *rs* oblongum cum duobus quadratis *er* & *rs*, id est per 5 e 12 cum quadrato *se*, æquatur quadratis *ru* & *rs*, id est per 5 e 12 quadrato *su*. Simillimum est de oblongo ex *ay* & *yi*, ducta *sl* perpendiculari ut prius. Hoc enim oblongum cum quadratis *li* & *sl* id est per 5 e 12 cum quadrato *is* æquatur quadratis *yl* & *lsi*, d est per 5 e 12 *ys*. Itaque oblonga æqualibus æqualia æquantur inter se, sublatisque utrinque æqualibus æqualium radiorum per 3 e 6 e 10 quadratis *se* & *si* relinquentur æqualia. Quare per 14 e 10 laterum æqualium rectangulorum sunt reciproca, utque *ua* ad *ay*, sic *yi* ad *ue*. Jam vero ut *ua* ad *ay*, sic per c 9 e 7 *oi*, id est per 6 e 10 *ea* ad *iy*, & sic igitur ex concluso *yi* ad *ue*, & sic per c 9 e 7 *ue* ad *eo* id est per 6 e 10 ad *ai*. Itaque ut *ea* ad *yi*, sic *yi* ad *ue*, & sic *ue* ad *ai*. Quare intersegmenta *eu* & *iy* sunt continue proportionalia inter datas.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIIII.

de recta proportionaliter secta & de reliquis quadrangulis.

Adhuc sectio triplex fuit, unde æqualitatis rationes quinque fuerunt ratio-

nalis: sequitur de sectione tertia alia sectio in segmenta duo toti proportionalia. Sectio ipsa primum definienda.

1. *Recta secatur secundum mediam & extremam rationem, quando fuerit ut tota ad majus segmentum, sic majus segmentum ad minus.* 3 d 6.

Hæc definitio geometrici generis tota est, per tropum tamen quendam sermonis ratio media & extrema dicitur pro medio & extremo proportionis termino. Secatur enim hæc linea sic, ut ipsa cum duobus segmentis faciat tres proportionis terminos, ipsaque tota sit primus terminus, majus segmentum medius, minus sit tertius, id breviter & proprie dicatur secari proportionaliter. Proportioni autem sectionis hujus á Campano 10 p 14 mirabilis potentia tribuitur in adscriptionibus ordinatorum solidorum: Cui (ait) cum plurima philosophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel præcipuum ex superiorum principiorum invariabili procedit natura, ut tam diversa solida tum magnitudine tum basium numero, tum etiam figura irrationali quadam symphonia rationabiliter conciliet. Hæc Campanus, alioquin laudum orator parcissimus. Eadem sectionis proportio divina appellatur á Luca Paciolo in libro hac de re perscripto, & cujus singulares usus comperientur vel in elementis Euclideis de fabrica quinquanguli, icosacedri, dodecaedri. Atque inde & cælestium rerum præcipua mysteria á Ptolemæo repetuntur.

2. *Si recta proportionaliter secta est rationalis datæ mensuræ, segmenta sunt ad eam & inter se irrationalia.* é 6 p 13.

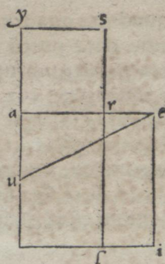
Euclides appellat utrumque tale segmentum ἀποτομὴν residuum, & certe segmenta hæc aliter explicari non possunt quam per residuum, ut si linea 7 pedum ponatur hoc modo, majus segmentum dicetur linea 7 pedum unde minus segmentum detractum sit, neque minus segmentum potest aliter explicari, nisi pars reliqua lineæ 7 pedum, unde majus segmentum sit detractum. Triangulum & é triangulatis omnia excepto parallelogrammo rectangulo, irrationalia esse sumuntur in geometria, neque tamen proponuntur, & hoc item sumi potuisset. Hæc igitur sectionis proportionalis definitio est: sectio sequitur é ratione oblongi cum quadrato.

3. *Si quadratum fiat e' data recta, rectæ ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia supra dimidium erit majus segmentum datæ proportionaliter sectæ.* 11 p 2.

Esto data *ae*, quadratum ex ipsa *aeio* & ab angulo *e* ad *u* medium contermini lateris, sit recta *eu*, & comparetur dimidio *ua*, differentia supra dimidium erit *ay*, quam dico majus esse segmentum datæ *ae* proportionaliter sectæ. fiat ex

ea qua-

ea quadratum *aysr*, & continuetur *sr* in *l*. Jam per 7 e 13 oblongum ex *oy* & *ay* cum quadrato ex *ua* ęquatur quadrato ex *uy*, id est per constructionem ex *ue*, & ideo per 5 e 12 æquatur quadratis *ea* & *au*. Tollatur utrinque commune quadratum ex *au*. Reliquum oblongum *yl* æquabitur quadrato *ai*, utrinque tollatur commune *al*, quadratum *yr* æquabitur oblongo *ri*. Itaque tres rectæ *ea*, *ar*, *re*, per 4 e 12 sunt continuè proportionales, & recta *ae* secta est proportionaliter.



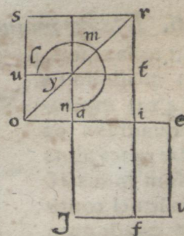
Itaque

Si recta proportionaliter secta continuetur majore segmento, tota secabitur proportionaliter, & majus segmentum erit data. 5 p 13.

Ut in eodem exemplo recta *oy* continuata est majore segmento, & oblongum è tota & minore segmento æquatur quadrato majoris. Atque ita licet infinite proportionaliter secando rectam augere, itemque contra minuere: minus segmentum rectæ proportionaliter sectæ est majus segmentum majoris proportionaliter secti &: hinc diminutio fiet in infinitum.

4. *Majus segmentum continuatum dimidio totius potest quintuplum ejusdem dimidii, & si recta potest quintuplum sui segmenti, reliquum factum duplum prædicti secatur proportionaliter, & majus segmentum est idem reliquum. 1 & 2 p 13.*

Hæc fabrica est proportionalis sectionis. ratio triplex sequitur: prima est majoris segmenti. Recta igitur *ae* secetur proportionaliter in *i*, majusque segmẽtum sit *ia*, & secta cõtinuetur in *io*, ut *oa* sit dimidium sectæ: dico quadratum ex *io* quintuplum esse quadrati ex *ao*: fiat igitur ex *ao* quadratum *aouy*, item ex *io* fiat quadratum *iosr*, videmus quadratum *ua* semel comprehendi in quadrato *si*. jam doceamus in gnomone reliquo *lmn* quater comprehendi, & describatur quadratum *aeJv* & continuetur *ri* in *f*, hic quadratum *ae* quadruplum est per 7 e 12 ad illud *ua* descriptum è dimidio, & æquatur gnomoni. Nam pars *iv* æquatur ipsi *ry*, primo per thesim cum *ai* sit majus segmentum, unde *ry* fit quadratum, quia diagonale alterum etiam quadratum: secundo complementa *sy* & *yi* per 11 e 10 æquantur, & iis æquatur *af*. Nam per 12 e 10, perque thesim dupla est complementi *yi*. Itaque æquatur utrique.

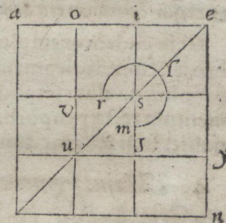


n

que. Quare gnomo æquatur quadrato quadruplo dicti quadratuli, majusque segmentum continuatum dimidio datæ potest quintuplum. Conversa patet in eodem exemplo. Nam cum *io* possit quintuplum ipsius *ao*, gnomo *lmn* erit quadruplus ipsius *ua*, cujus etiam per 7 e 12 quadruplum est *av*. Itaque æquale gnomoni: *aj* autē æqualis ipsi *ae*: Itaque dupla etiam ipsius *ao* id est *i* psius *ay*, & ideo per 13 e 10 *ji* duplum ipsius *at*, ideoque æquale complementis *iy* & *ys*; reliquum igitur diagonale *yr* æquatur reliquo rectangulo *iv*. Quare per 4 e 12 ut *ev* id est *ae* est ad *yt* id est *ai*, sic *ai* ad *ie*. Quare per 1 e *ae* secatur proportionaliter, & majus segmentum est *ai* dictum reliquum. sequitur altera proprietas quintupli.

5. *Minus segmentum continuatum dimidio majoris potest quintuplum ejusdem dimidii. é 3 p 13.*

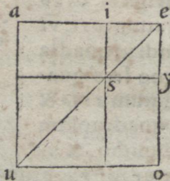
Ut hic recta *ae* secetur in *i* proportionaliter, & minus segmentum *ie* continuetur usque ad *o* dimidio majoris *ai*. Dico *oe* posse quintuplum ipsius *io*. fiat igitur ex linea *ae* quadratum, & compleatur figura, noteturque dimidii quadratum *su* & gnomo *rlm*. Hic primum quadratum *oy* est quintuplum secundi *su*. Comprehendit enim semel & gnomo reliquus *rlm* quater: æquatur enim oblongo *in*, quia *os* complementum æquatur ipsi *sy* per 11 e 10, & ideo ipsi *jn*, cum totum complementum *as* totis *n* æquetur, & *av* ipsi *os* æquetur per fabricam & 12 e 10, additoque utrique communi *iy*, totus gnomo toti oblongo æquatur. At oblongum *in* æquatur quadrato *aj* per thesim & 4 e 12, quod per 7 e 12 quadruplum est quadrati *su*. Quare minus segmentum *ie* continuatum *io* dimidio majoris potest quintuplum ejusdem dimidii.



Sequitur ratio tripli.

6. *Tota & minus segmentum possunt triplum majoris. é 4 p 13.*

Sit recta *ae* secta proportionaliter in *i*, & figura compleatur, oblonga *ay* & *io* cum quadrato *su* per 4 e 13 æquantur quadratis ex *ae* & *ie* potentibus triplum ipsius *ai*. Nam semel continent quadratum *su*, & oblongum utrumque eidem quadrato *su* æquatur per thesim & 4 e 12. Itaque ter continent.



7. *Parallelogrammum obliquangulum est rhombus aut rhomboides.*

Hactenus

Hactenus geometria fuit parallelogrammi rectanguli, superest brevissima in Euclidis elementis geometria de parallelogrammo obliquangulo, deque rectilineis reliquis, neque omnino prolixa geometria hic requirebatur, quia ex antecedente tota percipitur, reducendo nempe ad parallelogrammum per 2 e 11 e 10, quod per species specialibus exemplis intelligetur. Euclides autem sine ulla partitionis luce negligentius exposuerat, & à Posidonio ob eam caussam emendatus, ut Proclus indicat: Nos igitur ex methodica lege istam lucem aspernari nequaquam debuimus: parallelogrammum obliquangulum jam definitum est ex opposito parallelogrammi rectanguli: ut patet 2 e 11, ubi omnes obliqui sunt anguli, neque enim potest unus rectus esse in parallelogrammo, quin omnes sint recti, nec unus obliquus, quin omnes etiam sint obliqui. Dichotomia vero opposito genere respondet parallelogrammo rectangulo quadrato & oblongo. Nam quadratum & oblongum in rhombum & rhomboides dislocantur.

8. *Rhombus est obliquangulum æquilaterum.* 32 d 1.

Unde constat rhombum esse quadratum angulis veluti compressum, quo nomine & piscis & nentium mulierum instrumentum & in vitreis fenestris dissectæ plumbo laminæ, quia figurã hanc præ se ferant, appellantur. Quo vero compressior rhombus fuerit, tanto magis duo acuti erunt anguli, duo obtusi, ut hic. Exemplum vero metiendi rhombi in triangula secti sic est, geodæsia enim triangulatorum à triangulis repetitur.

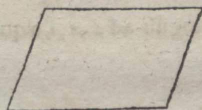


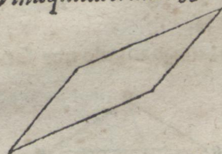




9. *Rhomboides est obliquangulum inæquilaterum.* 33 d 1.

Et rhomboides oblõgo sic opponitur, ut rhombus quadrato, sic item quanto major coarctatio fuerit, tanto major inæqualitas erit angulorum obtusorum & acutorũ, ut hic. Et rhomboides dicitur tãquã rhombo simile, tametsi simile præter inæ-



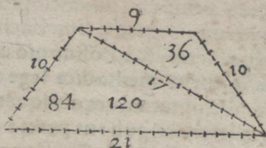


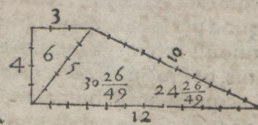


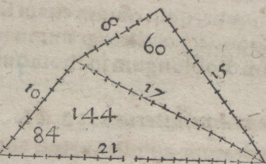
qualitatem angulorum nihil habet, mensuræ exemplum sic esto.

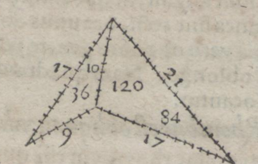
10. *Trapezium est quadrilaterum, non parallelogrammum.* 34 d 1.

Superest é quadrangulis trapezium. Euclides postulat hanc fabricam trapezium tanquam mensulam vocari: & sane nominis ejus ratio geometrica nulla est. Exempla figuræ & mensuræ ita sunto. Ergo triangulata quadrangula ejusmodi sunt.







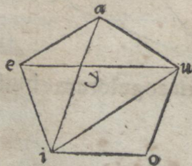


11. *Multangulum est quod pluribus quam quatuor lineis rectis comprehenditur.* 23 d 1.

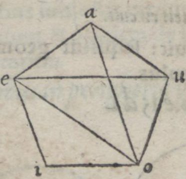
Hoc generali nomine reliqua omnia figurarum deinceps rectilinearum genera Euclides complexus est, ut sunt quinquangulum, sexangulum, septangulum, & deinceps pro numero angulorum innumerabilia. In quolibet autem multanguli genere unum ordinatum esse prædiximus, ut quinquangulum ordinatum, sexangulum ordinatum, & sic in aliis. De quibus omnibus separatim quod hic percipi possit, nihil animadverti, nisi unum de quinquangulo, quod adjungemus, reliquis in adscriptionem rejectis.

12. *Si quinquangulum æquilaterum tribus angulis æquatur, est æquiangulum.* 7 p 13.

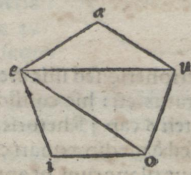
Ut in *aeiou* quinquangulo tres sunt anguli ad *a, e, i*, æquales dico & reliquos, & reliquos ipsis æquari: cõnectãture *u*, *a i*, *i u*. Hic triangula *a e i* & *e a u* per thesim perque 2 & 1 e 7 æquilatera & æquiangula, & bases *a i* & *e u* æquantur, & anguli *e a i*, *a u e* æquantur



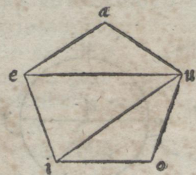
æquantur: item *aeu* & *eia*. Itaque *ay* & *ye* æquantur per 10 e 6, item reliquum *yu* reliquo *yi* æquatur cum ab æqualibus æqualia sublata sint: æquantur etiam per thesim & 10 e 6 *oui* & *oiu*: quare terni æquantur, totusque ideo angulus ad *u* æquatur toti angulo ad *i*, proindeque æqualibus. Dico insuper angulum ad *o* similiter æquari, si connectantur *oa* & *oe*: Ut hic.



Nam terni similiter redeunt æquales. Quod si anguli tres non deinceps æquentur: ut *aio*, facilior etiam res erit: Ut hic.

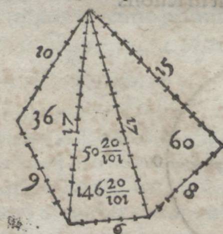


Nam *eua* & *eoi* anguli æquantur per thesim, interioresque *eou* & *euo*. Itaque toti ex binis æquantur. De reliquo ad *e* idem erit, si connectatur *iu*, ut hic: toti enim ex binis æquabuntur.



Triangulata multangula é suis item triangulis mensuram capiunt.

Ut hic, quinquangulum é triangulis tribus.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XV.

de lineis circuli.

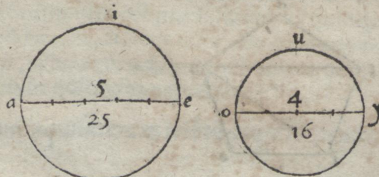
ADhuc rectilineorum geometria fuit: sequitur geometria obliquilineorum, é quibus præcipuus est circulus.

1. *Circulus est planum rotundum. é 15 d 1.*



Ut hic vides rectilineũ 3 e 6 definitur planum rectis lineis comprehensum, & ita potuit circulus definiri planum peripheria comprehensum: sed rotundius est hoc modo & brevius, ut postea in sphærico & sphæra. Describẽdi vero circuli circinus idẽ artifex est qui fuit peripheriæ: sed illic motus pũcti in extremo radio peripheriam lineantis consideratus est: hic consideratur motus radii totam aream radiantis. Circulus Aristoteli 6 cap. 3 Rhetoric. est planum à medio æquale, quod eodem quidem redit, sed à medio æquari commune est etiam sphæræ. Circulus vero est ordinatissimus planorum, ut antea patuit. 7 e 4.

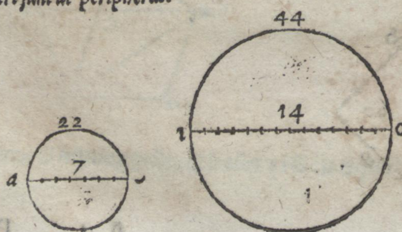
2. *Circuli sunt ut á diametris quadrata. 2 p 12.*



Circuli enim sunt plana similia & eorum latera homologa diametri, ut prædictum est 15 e 4: ideoque per 1 e 6, ut á diametris quadrata: quæ nempe duplicata ratio est homologorum laterum: Ut hic circulus *aei* ad circulum *ouy*, ut 25 ad 16 quadrata à diametris 5 & 4. De Euclidea demonstratione propositionis hujus erit in scholis

Diametri sunt ut peripheriæ.

Est Pappi th. 5 l 11 & 26 th. 18, Ut hic vides in *ae, io.*



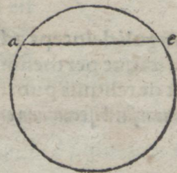
Itaque 3. *Geome-*

3. *Geometria circularis est in lineis aut in segmentis circuli.*

Partitio hæc de rebus subjectis utrumque sumitur ad materiam confusiorem aliqua luce separandum, & quidem de lineis, consideratio secantium hic prior est, & primo inscriptarum.

4. *Si recta duobus in peripheria punctis terminetur, cadet intra circulum. 2 p 3.*

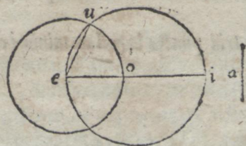
Ut hic *a e*, quia intra eadem puncta recta brevior est, quã peripheria per 5 e 2. Hinc sequitur infinita



sectio, de qua c 5 e 1. Hæc igitur propositio docet quomodo recta sit inscribenda circulo, sumptis nempe duobus in peripheria punctis.

5. *Si á termino diametri ex eaque radio æquante datam rectam peripheria describatur, recta á dicto termino in concursum peripheriarum inscribetur dato circulo æqualis datæ rectæ. 1 p 4.*

Ut sit data *a* & ab extremo e diametri *e i* & ejus parte *e o* æquante datam *a* peripheria describatur *e u*, recta *e u* á dicto extremo *e* ad *u* concursum peripheriarum inscribetur dato circulo per 4 e æqualis datæ, quia æquatur ipsi *e o* per 3 c 5 e 5, cũ



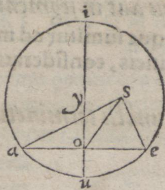
sit radius peripheriæ ejusdem. Atque hæc propositio docet quomodo recta data sit inscribenda circulo æqualis datæ. Inscriptarum porro coryphea est diameter: ostendit enim centrum, ostendit rationem omnium inscriptarũ. Itaque diametri circularis inventio primum generisque doceatur.

6. *Si inscripta rectæ bisecat inscriptam, est diameter circuli, ejusque medium est centrum. 1 p 3.*

Ut sit inscripta *a e* & inscripta *i o u* recte ipsam bisecans in o. Dico bisecantem esse diametrum & centrum esse ejus medium, ut in *y*. Caussa eadem quæ 3 e 11, quia bisecta est pro latere inscripti rectanguli & subtendit bisectam peripheriã, quibus oppositæ & inscripta & peripheria perinde bisecarentur: ideoque recto bisecans est diameter rectanguli, circularis autem diametri medium centrum esse patet é 2 c 5 e 5 & é c 17 e 4. Euclides impossibile quam caussam maluit &

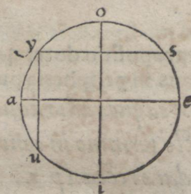
ita co-

ita cogit. Nam si *y* non est centrum, sed *s*, pars æquabitur toti. Nam triangulum *a o s* triangulo *e o s* æquilaterum erit: æquantur enim *a o* & *o e* ex thesi, item *s a* & *s e* radii, & *s o* communis est. Itaque per 1 e 7 anguli deinceps ad *o* æquantur, & per 8 e 5 sunt recti. Rectus igitur est *s o e*: æqualis itaque per thesim recto *y o e*, pars toti. Quare non est centrum, itemque accidet de reliquis punctis extra *y*. Itaque



1. *Si duæ rectæ duas inscriptas recte bisecent, concursus bisecantium erit centrum circuli.* è 25 p 3.

Ut hic *a e* & *i o* bisecent rectas *u y* & *y s*. Antea enim patuit 1 & 2 e 5 e 4 centrum esse in diametro & in concursu diametrorum. Centrum igitur dupliciter invenitur & è medio diametri, & è concursu diametrorum in medio bisectarum: concursu hic nil opus est, plurium diametrorum unica satis est diameter. *Et licet*



2. *Peripheriam ducere per tria puncta in rectam minime cadentia.*

Ut hic per *a, e, i*.



7. *Si diameter bisecat adiametrum, recte secat: & contra.* 3 p 3.

Ut diameter *a e* bisecet adiametrum *i o*, & *sine*



sint radii *u i* & *u o*. Caussa item est quæ 3 e 11.

8. *Si adiametri intersecantur, segmenta sunt inæqualia. 4 p 3.*

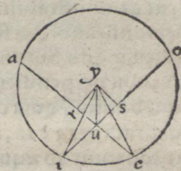


Consectarium est é 17 e 4. Nam si inscriptæ essent bisectæ, essent diametri contra thesim. Sed ratio est in partibus inscriptarũ, proportio in iisdem partibus sequitur.

9. *Si duæ inscriptæ intersecantur, rectangulum é segmentis unius æquatur rectangulo é segmentis reliquæ. 35 p 3.*

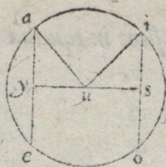
Si intersectæ sint diametri patet proportio, ut in prima figura. Nam rectangulum é segmentis unius æquatur rectangulo é segmentis reliquæ, cum sint ambo quadrata laterum æqualium. Si non sint diametri, sunto adiametri *a e* & *i o*: dico oblongum ex *a u* & *u e* æquari oblongo ex *o u* & *u i*. Sint enim radii ex *y* centro *y e* & *y i* utriuslibet quadrato utrumque æquabitur rectangulum é segmentis. Nam per 6 e cadat diameter *y u* in punctum communis sectionis *u*, suntque perpendiculares *y s* & *y r*. Hic per 3 e 11 inscriptæ secantur æqualiter in punctis *r* & *s*, & inæqualiter in puncto *u*. Itaque per 6 e 13 oblongum ex *o u* & *u i* cum quadrato *s u* æquatur quadrato *s i*, & addito communi *y s*; oblongum idem cum quadratis *u s* & *s y*, id est per 5 e 12 cum quadrato *y u* æquatur quadratis *i s* & *s y*, id est per 5 e 12 quadrato *i y*, id est per 3 e 2 e 12 *y e*, cui per eandem caussam patet oblongum alterum cum quadrato *y u* æquari. Tollatur utrinque quadratum *y u*, oblonga igitur æquabuntur eidem, ideoq; inter se. Atque hæc comparatio de partibus inscriptarum. Sequitur ratio integrarum inscriptarum, quam diameter una totam facit.





10. *Inscriptæ æquidistant á centro, in quas á centro perpendiculares sunt æquales. 4 d 3.*

Ut patet in proxima figura de lineis *a e* & *i o*, in quas á centro *u* perpẽdiculares *u y* & *u s* sunt æquales.

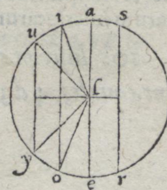


11. *Si inscriptæ sunt æquales, æ quidistant á centro: & contra.* 14 *p* 3.

Diametri in eodem circulo per 17 e 4 sunt æquales & á centro æqualiter distant, cum sint per centrum, vel potius nihil omnino distant, reliquæ inscriptæ judicantur æquales, majores, minores á diametro vel diametri centro. Euclides superius illud principii loco postulavit, duo sequentia præsentis elementi, ut demonstrabilia proposuit, cum tamen per se clariora sint & evidentiora. Demonstrationem Euclidis de prima parte si quis requirat, hæc est, converso tamen modo. Sunto primum *a e* & *i o* æquales, dico æquidistare á centro. Ducãtur enim perpendiculares *u y* & *u s*, ductæ bisecabunt datas per 3 e 11 & *y a* & *s i* æquabuntur, quia dimidia sunt æqualium. Sunto nunc radii *u a* & *u i* eorum quadrata per 5 e 12, æquantur binis quadratis crurum quæ bina, ideo æquantur, tollantur ab æqualibus quadrata *y a* & *s i*, relinquentur æqua *y u* & *u s*, lateraque ideo æqua per 2 c 2 e 12. Conversa similiter patet. Nam datæ perpendiculares bisecant & dimidia ut prius æqualia.

12. *Inscriptarum inæqualium diameter est maxima, diametroque propior major remotiore, remotißima minima, minimæque propior minor remotiore, duæque utrinque á diametro solæ æquantur. é* 15 *p* 3.

Hic partes quinque sunt, prima diameter est maxima, secunda diametro propior est major, tertia remotissima minima: quarta minimæ propior minor: quinta, duæ utrinque æquales, quæ omnes patent ex eodem illó æqualitatis argumento, id est centro decrescendi principio, & crescendi fine. Nam quo magis á centro receditur, aut ad cẽtrum acceditur, tanto minor aut major efficitur inscripta. Euclidis autem conclusio est per triangula de duobus lateribus majoribus reliquo, deque majore angulo. Prima pars sic patet, quia diameter *a e* æquatur *i l* & *l o*, radiis nempe & majoribus per 7 e 6, quam *i o*, & sic deinceps. Secunda pars de propiore patet per 4 e 7, quia triangulum *i l o* triangulo *u l y* æquicrurum majus est angulo: Ergo & basi. Tertia quartaque pars cõsectaria primæ & secundæ sunt, quinta pa-



tet per

tet per secundam partem. Nam si præter *io* & *sr* statuatur æqualis tertia, erit eadem etiam inæqualis, quia diametro propior & remotior.

13. *Rectarum á diametri puncto non centro in peripheriam, quæ per centrum, est maxima, propiorque maximæ est major remotiore, reliqua maximæ minima, minimæque propior minor remotiore: duæque utrinque á maxima vel minima solæ æquantur. 7 p 3.*

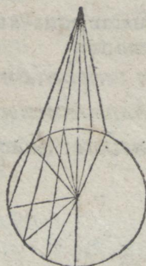
Prima pars de *ae* & *ai* patet, ut antea per 7 e 6. secunda de *ai* & *ao*, item de *ao* & *au* per 4 e 7. Tertia *ay* est minor quam *au*, quia *sy* æqualis ipsi *su* minor est rectis *sa* & *au* per 7 e 6, & sublato communi *sa*, relinquetur *ay* minor quã *au*. Quarta pars é tertia sequitur. Quinta sic esto: *sr* æquans angulum *asr* angulo *asu*, bases *au* & *ar* æquabuntur per 2 e 7. His si tertia ponatur æqualis, ut *al*, sequeretur per 1 e 7 angulum totum *lsa* particulari *rsa* æquari, atque é quinta parte consectarium est. Itaque

Si punctum in circulo est terminus trium rectarum in peripheriam æqualium, est centrum circuli. 9 p 3.



Secus á puncto diametri non centro non solum duæ utrinque æquarentur. Nam per quodlibet punctum diameter agi potest. Tale etiam fuit antea in quinquangulo: si tres anguli sunt æquales, omnes sunt æquales. ita in circulo: si tres ab eodem puncto rectæ in peripheriam æquantur, omnes æquantur.

14. *Rectarum á dato extra puncto in concavum peripheriæ, quæ per centrum, est maxima, propiorque maximæ est major remotiore: in convexum, segmentum maximæ est minima: minimæque propior minor remotiore, duæque utrinque á maxima vel minima solæ æquantur. 8 p 3.*

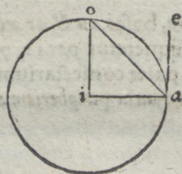


Demonstratio simillima superiori de quinque partibus.

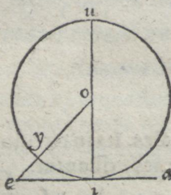
Atque hæc de secantibus, sequitur de tangentibus.

15. *Si recta est perpendicularis extremæ diametro, tangit peripheriam: & contra. é 16 p 3.*

Postulandum hoc fuerat ex ipsa perpendiculi definitione, quia si magis hæc propenderet, secaret, nec esset perpẽdicularis. Euclides tamen ita cogit. Secus esto recta *a e* perpendicularis diametro *a i*, & recta ab *o* cum cẽtro *i* cadat intra ad *o* & connectatur *o i*. Hic in triangulo *a o i* duo anguli contra 9 e 6 recti essent ad *a* per thesim & *o* per 10 e 6.



Superest demonstratio conversæ simillima antecedenti. Nam si *a e* tangens non est perpendicularis diametro *i o u*, ducatur á centro *o* perpendicularis *o e*, tum angulus *o e i* erit rectus, & *o i e* acutus. Ideoque per 11 e 6 *o i* id est *o y*, major erit, quam *o y e*, id est pars, quam totum.



Itaque

1. *Si recta est per centrum & contactum, est perpendicularis tangenti. 18 p 3.*

Et

2. *Si est perpendicularis tangenti, est per centrum & contactum. 19 p 3.*

Nam recta vel á centro in contactum vel á contactu in centrum est pars diametri.

Et

3. *Punctum*

3. *Punctum contactus est, quo á centro perpendicularis tangenti incidit.* Et

4. *Tangens est singularis eadem parte.*

Consectarium est é 10. e 2, qa tangens est ipsa perpendicularis. Id Euclidi est specialius propositum, quod nullla alia recta inter peripheriam & tangentem cadat Et

5. *Angulus contactus est minor quovis acuto rectilineo.é 16 p 2.*

Angulus contactus est angulus rectæ tangentis & peripheriæ, qui vulgo dicitur angulus contingentiæ, á Proclo dicitur κερατοειδὴς cornicularis, quia ex recta & peripheria instar cornu efficitur: minor igitur quovis acuto rectilineo. Quia si minor non esset, caderet recta inter peripheriam & perpendicularem. Postulat autem Euclides in opticis minimum angulum, sed opticum & physicum, non geometricum.

6. *Anguli contactus in æqualibus peripheriis sunt æquales.*

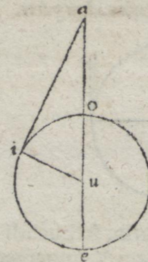
Et sic in catoptricis 1 p æqualitas ista sumitur. In peripheriis autem inæqualibus cornicularis minoris est major quam cornicularis majoris.

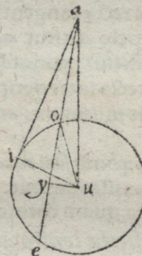
16. *Si á radio ex datæ peripheriæ centro ad datum extra punctum peripheria describatur, & á concursu datæ, radiique radio ipsi perpendicularis in descriptam connectatur cum dicto centro, recta a' dato puncto in concursum datæ & connectentis tanget datam peripheriam.* 17 p 3.

Ut radio *a e* á centro *a* datæ peripheriæ ad datum punctum e describatur peripheria *e o*, & sic in descriptam radio perpendicularis *i o*: connexa ad centrum *a*, ducatur denique *e u*. Dico ductam *e u* tangere. Quia perpendicularis erit extremæ diametro. Nã triangula *e a u* & *o a u* per 2 e 7, cum sint æquicrura & crurum communi angulo æqua, æquantur angulis ad basim. At angulus *o i a* rectus est, rectus igitur angulus *e u a*. Itaque recta *e u* per 10 e 2, est perpendicularis. Atque hæc de secantibus & tangentibus, sequitur de simul utroque genere.

17. *Si é duabus rectis a' dato extra puncto prima secat in concavum, reliqua tangit, oblongum e' secante & exteriore secantis segmento æquatur quadrato tangentis: & si oblongum tale æquatur quadrato reliquæ, reliqua ipsa tangit.* 36 & 37 p 3.

Si secans transit per centrum, res expeditior est, ut hic *a* secet, *ai* tangat, exterius segmentum est *ao* & centrum *u*. Jam *ui* erit perpendicularis tangenti per 1 e 15 e, tum per 7 e 13, oblongum ex *ea* & *oa* cum quadrato *ou*, id est *iu* æquatur quadrato *au*, id est per 5 e 12 quadratis *ai* & *iu*. Commune *iu* tollatur, æquabitur rectangulum quadrato tangentis. Si secans non transit per centrum: ut in hac figura, centro *u* per *se* reperto, *iu* per 1 e 15 e erit perpendicularis tangenti *ai*, tum ducantur *ua* & *uo*, & perpendicularis *uy* bisecãs *oe* per 7 e. Hic per 7 e 13 oblongum ex *ae* & *ao* cum quadrato *oy* æquatur quadrato *ay*. Itaque communi addito *yu* idem oblongum cum quadratis *oy* & *yu*, id est per 5 e 12 cum quadrato *ou* æquatur quadratis *ay* & *uy*, id est per 5 e 12 *au*, id est rursus *ai* & *iu*. Denique tollantur utrinque quadrata æqua *uo* & *ui*, relinquetur oblongum æquale quadrato tangentis. Conversa similiter demonstratur in hac figura. Esto rectangulum ex *ae* & *ay* æquale quadrato ipsius *ai*. Dico *ai* tangere. Ducatur per 16 e tangens *ao*, item sint *au*, *ui*, *uo*. Hic oblongum ex *ea* & *ay* æquatur quadrato *ao* per 17 e, & quadrato *ai* per thesim. Itaque *ai* & *ao* sunt æquales. Tum *uo* per 1 e 15 e est perpendicularis tangenti: Hic triangula *auo* & *aui* sunt æquilatera, & per 1 e 7 æquiangula: angulus autem ad *o* rectus est, rectus igitur & ei æqualis ad *i* per c 8 e 3. Quare *ai* est perpendicularis extremæ diametro, & per 15 e tangit.







Itaque

1. *Tangentes ab eodem puncto sunt æquales.*

Quia ipsarum quadrata eidem oblongo æquantur.

Et

2. *Oblonga è qualibet ex eodem puncto secante & secantis exteriore segmento æquantur inter se.*

Quia

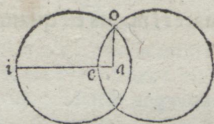
Quia æquantur eidem. Campanus ad 36 p 3.

3. *Datis duabus rectis licet alteri continuare tertiam, ut oblongum ex continuata & continuatione æquetur quadrato reliquo.*

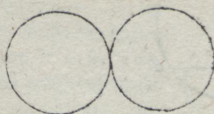
Vitellio 127 p 1. Ut in prima figura, si prima é datis site o, secunda i a, tertia o a. Superest geometria circularis de peripheriis intersectis & contiguis, deque rectis & peripheriis.

18. *Si peripheriæ sunt intersectæ vel contigué sunt eccentricæ: illæque duobus tantum punctis intersecantur, hæ diametros per contactum continuant.* 5.6.10.11.12 p 3.

Hæc omnia postulari poterāt: demonstrationes autem habent ex impossibili non difficiles. Prima pars patet, quia pars æquaretur toti, si centrum esset idem ut *a*. Nam duo radii communi radio *a o* æquantur, ideoque inter se æquantur *a e* & *a i* pars toti. Secunda pars ut prima demonstratur: secus pars æquaretur toti: Ut hic æquantur radii minoris peripheriæ *a e* & *a i*: item majoris *a e* & *a o*. Quare *a i* æquaretur ipsi *a o* pars toti. Si peripheriæ sint foris contiguæ, res expeditior est, neque demonstrationem Euclidis judicio meruit, Ut hic.







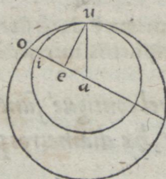
Tertia pars patet é prima: secus intersectæ essent concentricæ. Nam per 5 e centro invento, & per 2 c 5 e tribus rectis ad



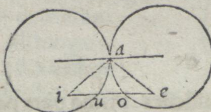
tria se-

tria sectionum puncta ductis à centro, radii tres essent æquales. Ut hic

Quarta pars eodem modo demonstratur, quia secus pars esset major toto: Ut hic. Esto namque per centra *a* & *e* recta *aeio*. Hic trianguli *uea* duo latera *u e* & *e a* per 7 e 6 sunt majora quam *ua*, ideoque quam *ao*: tollatur *a e*, reliquum *u e*, majus erit quam *eo*. At *ei* æquatur ipsi *eu*. Quare *ei* majus est quam *eo* pars toto.



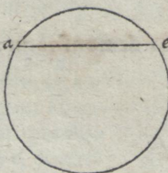
Idem erit si tactus sit extra. Ut hic. Nã per 7 e 6, *ea* & *ia* majora sunt quam *ie*. At *eo* & *iu* æquantur ipsis *ea* & *ia*. Quare *eo* & *iu* sunt majores quam ipsa *ie* partes toto. De rectis & peripheriis simul una ratio est.

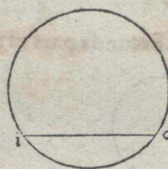


19. *Si inscriptæ sunt æquales, secant peripherias æquales: & contra.*

28.29p3.

Res constat ἐφαρμόσει, Ut in exẽplo: cõgruant enim circuli, tum æquales inscriptæ & peripheriæ congruent.





P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVI. de circuli segmentis.

1. *Segmentum circuli est quod comprehenditur extrinsecus à peripheria, intus à recta.*

Geometria segmentorum communis est etiam sphæræ, sed modo explicatu difficile est hoc ipsum generale, & segmentum comprehendi intus potest linea obliqua

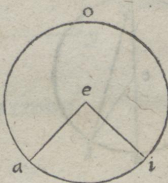
obliqua sive simplici sive multiplici, sed hic usitata sequimur. Itaque dum facilius occurret, utemur Euclide. Primo igitur definitio generalis præponitur ad subjectas species facilius distinguendum.

2. *Segmentum circuli est sector aut sectio.*

Hæc utraque species nominatur in Euclide & definitur speciatim: segmentum autem & sectio & sector nomina pene eadem sunt, definitionibus tamen distinguentur.

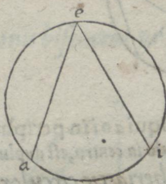
3. *Sector est segmentum intus comprehensum á recta duplici faciente angulum in centro, qui angulus in centro dicitur: ut peripheria dicitur basis sectoris. 9 d 3.*

Ut *aei* sector est. Hic sector definitur, & ejus rectilineus angulus absolute dicitur angulus in centro. Reliquum autem á sectore: ut hic *aoie* dicitur Archimedi sector major, qui tamen in duos sectores interjecto radio secari potest, ut postea secatur in geodæsia sectionis.



4. *Angulus in peripheria est angulus comprehensus á duabus rectis inscriptis, & in peripheria conterminis. 8 d 3.*

Sector in peripheria dici potuit, intus nempe comprehensus á duabus rectis conterminis in peripheria, ut hic *aei*. At in elementis neque mentio neque usus talis sectoris est, tametsi angulus ipsius absolute angulus in peripheria dicitur, ut sectoris in centro angulus appellatur angulus in centro.



5. *Angulus in centro duplus est anguli in peripheria in eandem peripheriam insistentis. 20 p 3.*

Varietas exempli hic triplex est Euclidi: demonstratio tamen una, ut hic angulus *eai* in centro, anguli *eoi* in peripheria duplus probabitur recta *ou* secante duo

te duo triangula utrinque æquicrura, & per 10 e 6 ad basim æquiangula: quorum sigillatim dupli sunt anguli, *e a u* ipsius *e o a* & *i a u* ipsius *i o a*. Nam cum duobus interioribus æqualibus æquetur per 2 c 9 e 6, duplus erit alterius. Itaque totus *e a i* duplus est totius *e o i*. Secundum exemplum sic est ex angulo in centro *a e i*, & in peripheria *a o i*. Hic crura *e o* & *e i* per 17 e 4 æquantur, & per 10 e 6 anguli ad *o* & *i*, quibus angulus in centro æquatur per 2 c 9 e 6. Itaque duplus alterius. Tertium exemplum est ex angulo in centro *a e i* in peripheria *a o i* & sit diametero *e u*. Hic angulus totus *i e u* per 2 c 9 e 6 æquatur interioribus angulis *e o i* & *e i o* æqualibus inter se per 10 e 6: Ideoque duplus est alterius: Item particularis *a e u* æquatur per 2 c 9 e 6 angulis *e o a* & *e a o* æqualibus itẽ inter se per 10 e 6. Itaque reliquus *a e i* est duplus reliqui *a o i* in peripheria.







Si angulus in peripheria æquatur angulo in centro, est duplus basi.

6. *Anguli in centro peripheriave circulorum æqualium sunt ut peripheriæ in quas insistunt: & contra. é 33 p 6. 26, 27 p 3.*

Hic proportio duplex est cum peripheria subjecta angulorũ in centro & angulorũ in peripheria. Sed de angulis in centro satis sit explicari. Sunto primum anguli æquales





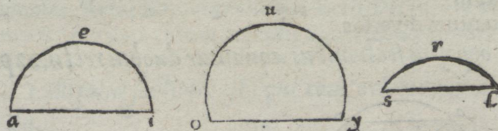
in centro *aei* & *ouy*, bases *ai* & *oy* erunt æquales per 7 e 7, & peripheriæ *ai* & *oy* per 19 e 15, item æquales. Itaque si anguli sunt inæquales, peripheriæ item tanto inæquales erunt. Idem erit de angulis in peripheria. Conversa item vera est, unde etiam sequitur.

Ut sector ad sectorem, sic angulus ad angulum.

Atque hæc de sectore.

7. *Sectio est segmentum circuli intus comprehensum ab una recta, quæ basis sectionis dicitur.*

Ut hic, sectiones sunt *ae*, *io*, *uy*.



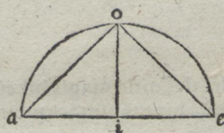
8 *Sectio absolvitur invento centro.*

Inventio centri patuit 6 e 5, & sic vides hic absolvendi circuli modum per c 6 e 15.



9. *Peripheria sectionis bisecatur perpendiculari bisecante basim.* 30 p 3.

Ut hic. Ducito rectas *ao* & *oe*, triangula habebis *aio* & *eio* per 2 e 7. Itaque bases *oa* & *oe* æquales & per 19 e 15 æquales peripherias subtensis. Hic Euclides duas peripherias in unam ἐφαρμόσει comprehendit, & nos comprehendimus.



10. *Angulus in sectione est angulus comprehensus à duabus rectis cōterminis basi & in peripheria conterminis.* 7 d 3.

Ut *aoe* in superiore exemplo.

11. *Anguli in eadem sectione sunt æquales.* 21 p 3.

Sectio sit *eauo*, & in ea anguli ad *a* & *u*: hi æquantur, quia per 5 e sunt dimidii ad angulum in centro *eyo*, vel æquantur per 6 e, quia insistunt in eandem peripheriam. Hic constat angulos in sectione reipsa esse angulos in peripheria, basique tantum diversos.



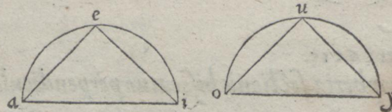
12. *Anguli in oppositis sectionibus æquantur duobus rectis, 22 p 3.*

Hic enim anguli oppositi ad *a* & *i* æquantur tribus unius trianguli *eoi* æquantibus duos rectos per 9 e 6. Nam *i* primum æquatur sibi, deinde *a* per partes æquatur duobus reliquis. Nam *eai* æquatur ipsi *eoi* & *iao* ipsi *oei* per 11 e. Itaque oppositi æquantur duobus rectis. Ratio sectionis ita est, similitudo sequitur.



13. *Si sectiones capiunt angulos æquales, sunt similes, e' 10 d 3.*

Ut hic *aei, ouy*. In definienda similitudine sectionum circularium adhibet Euclides tantum æqualitatem duorum angulorum, ex qua proportio peripheriarum & basium consequitur, ut Pappus ait 13 th. 5 lib. Nec definitio magis hic est, quam é definitione generali consectarium. Et triangula hic inscripta æquiangula cum sint ex thesi, etiam per 9 e 7 similia erunt.



14. *Si sectiones similes sunt in æquali basi, sunt æquales. 23. & 24 p 3.*

In prima figura basis eadem esto. Ac si dicantur inæquales sectiones, majorque altera

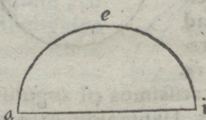
que altera *a o e*, angulus in ea *a o e* minor erit angulo *a i e* in minore sectione per 4 c 9 e 6,



qui tamen per thesim est æqualis: In secunda figura si superponatur sectio sectioni congruet, secus contra primam partem, sectiones similes in eadem basi nõ essent æquales. At res ἐφαρμόσσει contenta fuerit. Per superiores autem duas propositiones & per 2 c 6 e 15 licet invenire datæ sectioni similem, vel é dato circulo amputare.

15. *Angulus sectionis est, qui comprehenditur á terminis sectionis.* 7 *d* 3.

Ut *e a i* & *e i a*.



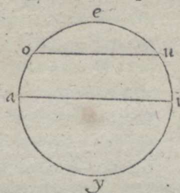
16. *Sectio est semicirculus aut inæqualis semicirculo.*

17. *Semicirculus est sectio dimidia circuli.*

Itaque

Semicirculus comprehenditur á peripheria & diametro. 18 d 1.

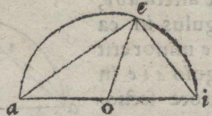
Ut *a e i* est semicirculus: reliquæ sectiones, ut *o y u*, & *o e u* inæquales, illa major, hæc minor.

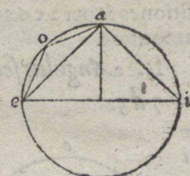


18. *Angulus in semicirculo rectus est, semicirculi minor recto rectilineo, major quovis acuto: in majore sectione est minor recto, majoris major, in minore major, minoris minor.* é 31 & 16 *p* 3.

Septem partes sunt hujus èlementi, prima est quod angulus in semicirculo sit rectus: Ut in *a e i*: nam si radius ducatur *o e* dividetur angulus *a e i* in duos an-

gulos *aeo* & *oei* æquales angulis *eao* & *eio* per 10 e 6: Itaque cum sit æqualis reliquis angulis, est rectus per 1 c 3 e 8. Aristoteles hanc geometriam complexus est 2 post, & 9 philos. & ait angulum in semicirculo rectum esse, quia sit dimidius duorum rectorum, quod eodem redit. Secunda pars quod angulus semicirculi sit minor recto, patet ex eo quia pars est recti. Nam angulus semicirculi *aie* est pars recti rectilinei *aiu*. Tertia quod sit major quovis acuto: patet per 4 c 16 e 15. Secus enim tangens non esset eadem parte singularis. Quarta pars sic patet. Angulus ad *i* in majore sectione *aei* est minor recto, quia in eodem triangulo *aei*, qui ad *a* rectus. Et si crus neutrum sit per centrum, constitui tamen potest angulus æqualis dato in eadem nempe sectione. Quinta sic. Angulus majoris sectionis *eai* est major recto, quia continet rectum. Sexta sic. Angulus *aoe* in minore sectione est major recto per 12 e 15, quia qui in opposita sectione ad *i* est minor recto. Septima sic. Angulus *eao* est minor recto, quia pars recti nempe exterioris si producatur *ia*.



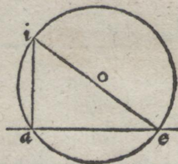


Atque hæc de angulis circuli, quorum omnium efficacissimus est angulus in semicirculo, nec frustra ab Aristotele toties appellatus. Hanc igitur Aristotelis geometriam plenius aperiamus. Hinc enim plurima oriuntur. Itaque

1. *Si duæ rectæ diametro circuli conterminæ conterminentur in peripheria, faciunt angulum rectum.* Et

2. *Si recta infinita secetur á peripheria externi centri in punctis dato & contingente, & diameter sit á contingente, recta á dato puncto connectens diametrum erit perpendicularis super infinitam.*

Ut hic recta *ae* á peripheria *aei* centri *o* extra datã secetur in dato puncto *a*, & in puncto contingente ut in *e*, & sit ab *e* diameter *eoi*, recta *ai* á dato puncto *a* connectens diametrum *ioe* erit perpendicularis super infinitã, quia faciet cum infinita angulum in semicirculo. Et



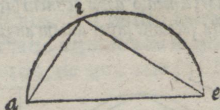
3. *Si recta á dato puncto faciens angulum cum infinita, fiat diameter peripheriæ secantis infinitam, recta á dicto puncto connectens segmentum erit perpendicularis super infinitam.*

Ut in eodem exemplo recta *ioe* fiat diameter, á cujus bisectione pro centro peripheria secet infinitam, & cæt. Et

4. *Si duarum rectarum major fiat diameter circuli, minorque majori contermina & inscripta connectatur, major plus poterit, quam minor quadrato connectentis. ad 13 p 10.*

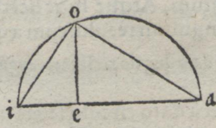
Ut *ae*

Ut *ae* diameter plus potest quam *ei* quadrato ex *ai*: rectangulū enim fiet triangulū *aei*, & per 5 e 12 poterit æquale cruribus.



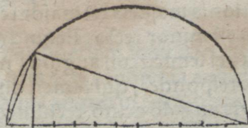
19. *Si recta continuata é duabus rectis fiat diameter circuli, perpendicularis á puncto continuationis in peripheriam erit proportionalis inter datas. 13 p 6.*

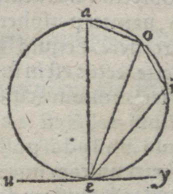
Ut sunto datæ *ae* & *ei*, é quibus *aei* continuata sit, & perpendicularis *eo* sit in peripheriam *aoi*. Hæc erit media proportionalis, quia ductis rectis *ao* & *io* triangulum fiet rectangulum, cū *aoi* sit angulus in semicirculo, & per 1 c 4 e 8 o e erit proportionalis inter *ae* & *ei*. Sic si quadrati decempedalis latus quæratur oblongi æqualis ipsi quadrato latera unius pedis & decem pedum continuentur, proportionalis media erit latus quadrati.



20. *Anguli in oppositis sectionibus æquantur alternis angulis secantis & contiguæ. 32 p 3.*

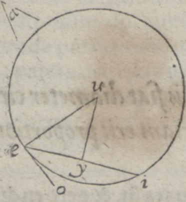
Ut sunto sectiones *eio*, & *eao*, tangens sit *uey*, & anguli in oppositis sectionibus *eao* & *eio*: Dico ipsos æquari alternis angulis ex secāte & contigua *oey* & *oeu*: primo qui ad *a* æquatur alterno *oey*, quia & tres anguli *oey*, *oea*, *aeu* duobus rectis æquantur per 1 c 8 e 5, quibus item æquantur tres anguli in triangulo *aeo* per 9 e 6: á ternis æqualibus tolle rectos *aeu* & *aoe*. Rectus enim est *aoe* per 18 e, quia in semicirculo, tollatur & communis *aeo*, reliqui *eao* & *oey* alterni æquabuntur. Secundo anguli ad *a* & *i* æquantur duobus rectis per 12 e, quibus æquantur & *oey* & *oeu*. Atqui *eao* æquatur alterno *oey*. Ergo qui ad *i* æquatur alterno reliquo *oeu*. Neque vero interest, utrum angulus ad *a* sit ad diametrum. Id enim demonstrandi tantum caussa statuitur, ubilibet enim fuerit, æqualis erit, nempe in eadem sectione.

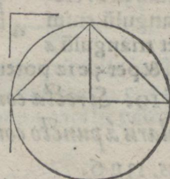




Itaque
1. Si ad

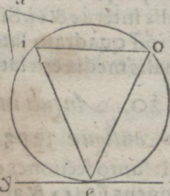
1. *Si ad terminum datæ rectæ æquetur angulus rectilineus dato, & ab æquati vertice perpendicularis reliquo lateri concurrat cum perpendiculari á medio datæ, concursus erit centrum circuli per æquatum angulum descripti, in cujus opposita sectione super datam angulus æquabitur dato.* é 33 p 3.



Quod in tribus generibus anguli potes experiri eodem semper argumento, ut hic datus angulus *a* data recta *e i*, ad terminum *e* æquatus angulus *i e o*, perpendicularis lateri *e o* sit *e u*, at â medio datæ sit *y u*: Hic *u* erit centrum optatum. Atque hinc licet sectionem describere super datam rectam, quæ capiat angulum rectilineum æqualem dato.

2. *Si angulus secantis & contiguæ æquetur dato angulo rectilineo, angulus in opposita sectione eidem pariter æquabitur.* 34 p 3.



Ut in subjecta figura. Atque hinc licet á dato circulo sectionem secare, in qua sit angulus æqualis dato. Ut sit angulus datus *a* & circulus *e i o*, facies ad punctum *e* ex secante *e o* & tangente *y u* angulum æqualem dato per 5 c 6 e 5, qualis hic sit *o e u*, tum sectio *e o i* capiet angulum æqualem dato. Quapropter hæ sunt opes anguli in semicirculo, ab Aristotele ideo tantopere appellati, quibus lubet addere ad extremum quandam singularem & mirificam peripheriæ naturam. Angulus sectionis majoris est major recto. Angulus sectionis minoris est minor recto. Ecquid (inquies) cur æqualis sectionis vel semicirculi angulus non erit æqualis recto? Euclides nominatim nihil hic respondet, qui tamen dixit ad 16 p 3 angulum semicirculi majorem esse quovis angulo acuto rectilineo, quod videtur solum recto convenire, ex inæqualitate cum recto definitur obtusus & acutus: Inter obtusum & acutum rectus est. Datur vero in circulo major recto velut obtusus, datur minor recto velut acutus, datur etiam minor quovis acuto, & major quovis acuto, ut inter peripheriam, rectamque perpendicularem media recta nequeat intercedere. Ecquid igitur (inquies) restat quin semicirculi angulus rectus sit? Certe rectus est in suo genere, & sic anguli recti dicuntur in sphæra, & medius inter obtusum acutumque sui generis est, & generaliter ita perpendiculum definitum nobis est 12 e 2. Angulus rectus ita definitus 8 e 3. Mirabile itaque sit angulo nihil addi posse, quo major acuto fiat, & tamen majorem esse, cui nihil præter unicam lineam accessit. Datur majus, datur minus, cur non datur æquale? & quidem datur id inter quod & æquale, ne recta quidem possit intercedere. Angulum tamen rectum rectilineum majorem esse recto circulari, geometria con-

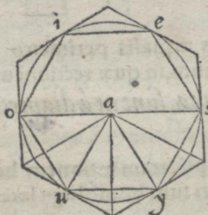
tria convincit. Datur igitur in circulo ratio inæqualitatis majoris & minoris, nō datur ratio æqualitatis. Sed multo mirabilius fuerit illud è ratione inscriptarum, quod detur ratio æqualitatis majoris minorisque inæqualitatis, non detur tamen proportio, de quo erit in scholis.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVII.
de adscriptione circuli & trianguli.

GEometria plani rectilinei & circuli adhuc fuit: sequitur utriusque ascriptio: quæ primo libro generaliter definita est: peripheria vero circuli est ipsius terminus. Itaque rectilineum inscribitur circulo, quando peripheria tangit angulos, 3 d 4: Circumscribitur cum à singulis lateribus peripheria tangitur: 4 d 4.

1. *Si rectilineum ascriptum circulo est æquilaterum, est æquiangulum.*

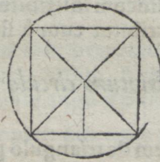
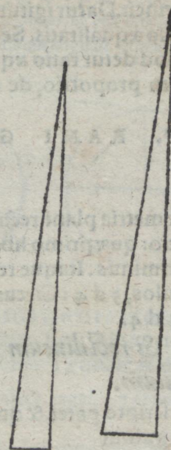
De inscripto patet, & quidem de triangulo per se, quia si est æquilaterum, est æqui angulum per 2 c 10 e 6. In triangulato autem res demonstrāda est. Ut hic si inscriptæ *o u* & *s y* sint æquales, subtendent peripherias æquales per 19 e 15: tum si mediam peripheriam inter utramque omittas, ut hic *u y* & reliquam *o i e s* addas utrique, tota *o i e s y* subtensa angulo ad *u* & *u o i e s* subtensa angulo ad *y* æquabuntur. Itaque anguli in peripheria, insistentes in peripheriis æqualibus æquantur. De inscripto item verum, si circumscriptus circulus intelligatur. Perpendiculares enim à centro *a* in latera circumscripti per 5 e 12 facient triangula utrinque æquilatera & æquiangula ductis in angulos radiis, ut in eodem exemplo.



2. *Aequatur triangulo æqualis, basis quidem perimetro, altitudinis autem perpendiculari à centro in latus.*

Ut hic patet per 1 c 6 e 7. Tria enim sunt triangula in uno triangulo æqualta. Idem

ta. Idem erit de triangulato, ut hic in quadrato: quatuor enim triangula fient æquealta: Deniq; rectilineum quodlibet æquilaterum adscriptum circulo æquabitur triangulo basis æqualis perimetro ipsius adscripti, quia perimeter continet bases triangulorum, in quæ rectilineum resolvitur.

3. *Rectilinea similia circulis inscripta, sunt ut á diametris quadrata.* 1 p 12.

Quia per 1 e 6 plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum. At in rectilineis inscriptis diametri sunt homologa latera vel sunt proportionales lateribus homologis. Ut sunto rectangula triangula similia *aei*, *ouy*, quia *ae* & *ou* sunt diametri, res protinus patet. At in triangulis obliquangulis *sei* & *ruy* similibus diametri sunt proportionales homologis lateribus, nempe *ei* & *uy*. Nam ex thesi ut *se* ad *ru*, sic *ei* ad *uy*: & ideo ex præcedenti ut diametri *ea* & *uo*. In triangulatis similibus, cum per 2 e 10 resolventur in triangula similia, idem erit.





Itaque

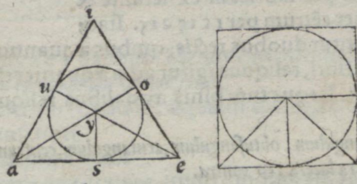
Si sit ut diameter circuli ad latus rectilinei inscripti, sic diameter secundi circuli ad latus secundi rectilinei inscripti, triangulisque inscriptorum singularia similia similiterque sita, rectilinea inscripta erunt similia similiterque sita.

Id Euclides sic sumpsit ad 2 p 12, & quidem ut videtur é 18 p 6: & nos ideo assumpsimus. Adscriptio circuli est cum triangulo quolibet: cum triangulato autem

autem duntaxat ordinato, & quidem adſcriptio circuli eſt communis.

4. *Si duæ rectæ biſecent duos angulos dati rectilinei, circulus radii ab earum concurſu in latus perpendicularis inſcribetur dato rectilineo. 4 p 4.*

Ut in triangulo *aei*, rectæ *ao* & *eu* biſecent angulos, & ab earum concurſu *y* ſunto perpendiculares *yo*, *yu*, *ys*, dico centro *y* radio *yo* vel *yu* vel *ys* deſcribi circulum per c 13 e 15, quia biſecantes cum perpendicularibus faciẽt triangula æquilatera per 2 e 7, ideoque tres perpendiculares, quæ ſunt baſes æquilaterorum æquales erunt. Idem argumentum erit de triangulato.

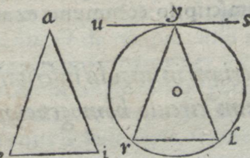


5. *Si duæ rectæ recte biſecent duo latera dati rectilinei, circulus radii ab earum concurſu in angulum circumſcribetur dato rectilineo. 5 p 4.*

Ut in ſuperioribus figuris. Demonſtratio eſt eadem ſuperiori: Tres enim radii per 2 e 7 æquantur, & concurſus per c 13 e 15 eſt centrum. Atque hæc communis eſt adſcriptio circuli, ſequitur adſcripto rectilinei, & primum trianguli.

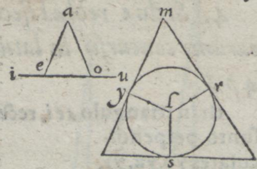
6. *Si duæ inſcriptæ á contactu rectæ & peripheriæ æquent duos utrinque angulos duobus angulis dati trianguli, connexæ inſcribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. é 2 p 4.*

Detur triangulum *aei* & *o* circulus cui inſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato. Tangat igitur recta *uys* peripheriam *yrl*, & á contactu *y* inſcriptæ *yr* & *yl* æquent cum tangẽte angulos *uyr*, *syl* angulis *aei* & *aie*, & connectatur *rl*, æquabunt per 17 e 16 angulos alternorum ſegmentorum angulis *url* & *yrl*. Itaque per c 3 e 7 cum bini æquentur, reliquus æquabitur reliquo. Circumſcriptio hic etiam ſpecialis eſt.



7. *Si duo anguli in centro dati circuli æquentur ad commune latus exterioribus angulis dati trianguli, rectæ tangentes peripheriam in cruribus angulorum circumſcribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. 3 p 4.*

Esto triangulum, & in eo exteriores anguli *aei* & *aou*: circulus autem *ysr*, & in centro *l* æquentur anguli *ylr* & *slr* ad commune latus *lr* angulis exterioribus *aei* & *aou*. Dico angulos circumscripti trianguli æquari angulis dati trianguli: Nam quadranguli *ylrm* quatuor interiores æquantur quatuor rectis per 4 e 10, duo que ad *y* & *r* sunt recti per fabricam ex secante & cōtigua à contactu per cētrum per 1 c 15 e 15. Itaq; reliqui ad *l* & *m* æquantur duobus rectis, quibus æquantur *aei* & *aeo*: At angulus ad *l* æquatur exteriori, reliquus igitur ad *m* æquatur reliquo *aeo*. Idem erit de angulis *aoe* & *aou*. Itaque tum binis æqualibus reliqui ad *a* & *i* æquabuntur.



Itaque

Si triangulum est rectangulum, obtusangulum, acutangulum, centrum circumscripti circuli est in latere, extra latera, intra latera: & contra.

Ut vides in tribus subjectis figuris centrum *a*.







P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XVIII.

de adscriptione triangulati.

Atque hæc trianguli est adscriptio. Triangulati ordinati adscriptio doceatur, & primum circumscriptio communis ex antecedente tamen inscriptione hoc modo.

1. *Si rectæ tangant peripheriam in angulis inscripti triangulati ordinati, circumscribent triangulatum circulo homogeneum inscripto triangulato.*

Exempla per species inscriptorum proponentur: specialis itaque inscriptio dicatur, & quidem per unicum latus, quod repetitum, quoties opus est, peripheriam compleat. Id enim fecit Euclides in uno quindecangulo, nos in omnibus faciemus.

2. *Si diametri recte intersecentur, subtensa recto erit latus quadrati. é 6 p 4.*

Ut hic.

Ut hic. Crura enim anguli erunt radii, quorum diametri connexæ faciēt quatuor triangula rectangula



æqualia cruribus & per 2 e 7 basibus. Ideoque quadratum inscribent. *Itaque*

Quadratum inscriptum est dimidium circumscripti.

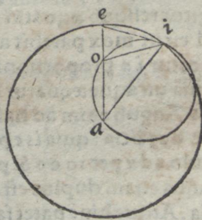
Quia latus circumscripti (quod hic æquatur diametro circuli) potest per 5 e 12 duplum ad latus inscripti. *Et*

Est majus dimidio circumscripti circuli.

Quia circumscriptum quadratum, quod duplum est, est majus toto circulo. Reliquis deinceps multangulis imparilateris inscribendis opus est triangulo, cujus uterque angulus ad basim sit multiplus reliqui, in quinquangulo primum duplus, quod sic habetur.

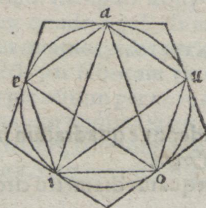
3. *Si recta secetur proportionaliter, trianguli crurum sectæ æqualium, basis majori segmento æqualis, uterque angulus ad basim erit duplus reliqui, & basis erit latus quinquanguli in circulum cum triangulo inscripti. 10 & 11 p 4.*

Hic primum ad fabricam trianguli sumes pro radio rectam *ae* per 3 e 14 sectam proportionaliter in puncto *o*, circulumque facies centro *a* radio *ae*, & per 5 e 15 inscribes æqualem majori segmento, inscriptamq; cum secta connectes. Hoc triangulum erit optatum. Nam per 10 e 6 anguli ad basim *ei* æquantur, ut quod de altero probatum sit, probatum quoque sit de reliquo: tum ducatur recta *oi*, & circulus circumscribatur per 6 e 17 triangulo *aoi*: hunc circulum tanget recta *ei* per 17 e 15: quia ex thesi recta *ae* secatur proportionaliter, ideoque oblongum secantis & exterioris segmenti



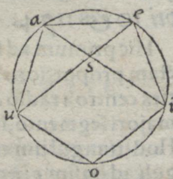
æquatur quadrato majoris segmenti, cui æquata est ex thesi basis *ei*: Hic igitur angulus *aie* duplus est anguli ad *a*, quia æquatur angulis *aio* & *oai* æqualibus inter se. Nam per 20 e 16 *eio* æquatur angulo *oai* in alterno segmento, & reliquus *aio* æquatur sibi ipsi. Itaque & angulus *aei* æquatur duobus eisdem, quia æquatus est angulo *aie*. At angulus *eoi* exterior duobus eisdem æquatur per 2 c 9 e 6. Itaque anguli *ioe* & *oei* (quia æquales eidem) æquantur inter se. Quare per 10 e 6 latera *oi* & *ei* æquantur: ideoque & *ao* & *oi*: anguliq; *oai* & *oia* sunt æquales per 10 e 6. Quare cum ambobus æquatus sit angulus *aie* duplus erit alterius æqualium: At basis *ei* est latus quinquanguli æquilateri. Nam si

duæ rectæ bisecantes inscripti trianguli utrumque angulum duplum reliqui cō nectantur, & inter se & cum angulis inscribent circulo quinquangulum æquilaterum, cujus unum latus erit ipsa basis. Ut hic cum anguli *eoa, eoi, uio, uia, iao* æquentur in peripheria, subtensæ peripheriæ per 6 e 16 æquantur, ideoq; per 19 e 15 subtensæ *ae, ei, io, ou, ua*: & ex iis quinque lateribus unū est *ae*. Ergo recta proportionaliter secta ita quinquanguli adscriptionem machinatur, indeque e vicissim redditur linea proportionaliter secta.



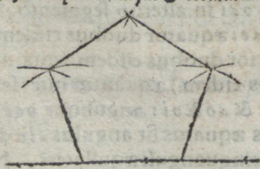
4. *Si duæ rectæ subtendunt duos deinceps angulos inscripti quinquanguli, secantur proportionaliter, & majora segmenta sunt latera inscripti. ex 8 p 13.*

Ut hic sunto rectæ *ai* & *eu* subtendentes angulos *aei*, & *eau*, dico eas proportionaliter secari in puncto *s*, & majora segmenta æquari lateri quinquanguli. Hic enim bina triangula sunt æquiangula: primo *aei* & *uae* per thesim & 2 e 7. Itaque anguli *aie* & *aes* æquantur: de inde *aei* & *ase*, quia angulus ad *a* communis est, reliquus igitur reliquo æquatur per c 3 e 7. Jam per 9 e 7, ut *ia* & *ae*, id est ut mox patebit ad *is*, sic *ea* ad *as*. Itaque per 1 e 14 secatur *ia* proportionaliter: *ea* autem latus æquatur *is*, quia utraque æquatur lateri *ei*, illa per thesim, hæc per 10 e 6. Anguli enim ad basim *ise* & *ies* æquantur ejusdē nempe duplicia: quia *ise* per 3 c 9 e 6 æquatur duobus interioribus æqualibus angulo ad *u* per 10 e 6 & proximam conclusionem. Itaque duplus est anguli *aes*, cujus etiam duplus est angulus *uei* per 6 e 16, insistens nempe in dupla peripheria. Atque hinc patet fabrica quinquanguli ordinati super datam rectam. Itaque



Si data recta secta proportionaliter continuetur utrinque majore segmento, sexque peripheriæ radio datæ concurrant, binæ utrinque á terminis datæ & continuatæ, duæ reliquæ ab earum concursu, rectæ per cōcursus & terminos datæ constituent super datam quinquangulum ordinatū.

Exēplū sic est.

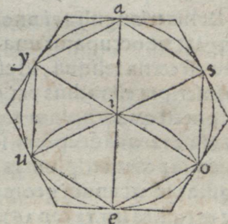


5. *Si diameter circuli quinquangulo circumscripti est rationalis, est irrationalis ad latus inscripti quinquanguli. é 11 p 13.*

Sic antea segmenta rectæ proportionaliter sectæ irrationalia fuerunt. Reliqua deinde triangulata multiplicata á laterum ternario, quaternario, quinario possunt inscribi circulo per inscriptum triangulum, quadratum, quinquangulum. Itaque per triangulum inscribetur triangulatum angulorum 6.12.24. 48: per quadratum inscribetur triangulatum angulorum 8.16.32.64: per quinquangulum inscribetur triangulatum angulorum 10.20.40.80. & sic deinceps.

6. *Radius circuli est latus inscripti sexanguli. é 15 p 4.*

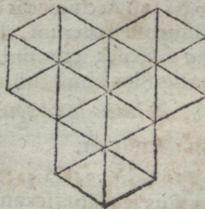
Sexangulum inscribitur per triangulum æquilaterum inscriptum bisectis tribus angulis, sed brevius inscribitur per radium sexies deinde inscriptum: Ut in dato circulo sit diameter *ae*, & centro *e* radio *ie* describatur peripheria *uio*, & á punctis *o* & *u* sint diametri *oy* & *us*, hæ connexæ & inter se & cum diametro *ae* inscribent sexangulum æquilaterum dato circulo lateris radio æqualis: ut *eu* æquatur ipsi *ui*, quia ambæ æquantur eidem *ie* per c 17 e 4. Itaque *eiu* est æquilaterum triangulum, & similiter *eio* æquilaterum, anguli que in centro sunt $\frac{2}{3}$ recti, ideoque æquales, & per 1 c 8 e 5 angulus *sio* est $\frac{1}{3}$ duorū rectorum, & per 2 c 8 e 5 anguli ad verticem item æquales. Quare sex sunt æquales, & ob id per 6 e 16 & 19 e 15 bases omnes æquales, & inter se, & ut jam patuit, radio dati circuli. Inscriptum est igitur sexangulum é radio circuli æquilaterum, & per 1 e 17 æquiangulum.



Itaque

1. *Sexangula tria ordinata complent locum.*

Ut hic. Sex enim triangula sunt æquilatera resolutis sexangulis in sex triangula, vel quia quilibet angulus ordinati sexanguli valet rectum & $\frac{1}{3}$ recti. Itaque triplex angulus sexanguli valet $\frac{12}{3}$ recti id est quatuor rectos. Præterea vero nulla é planis figura complet locum. Quinquangulum non complet: Triplex enim ejus angulus faceret tantum rectos $3\frac{3}{5}$: quadruplex faceret $4\frac{4}{5}$, quod amplius & majus est. Septanguli angulus duplex faceret tantum rectos $2\frac{6}{7}$: triplex $3\frac{9}{7}$ id est $4\frac{2}{7}$ quod plus est, & sic deinceps inducenti constabit tribus tantum planis ordinatis compleri planum locum.



Et

2. *Si rectæ ab uno inscripti sexanguli angulo in tertium utrinque angulum connectantur, inscribent triangulum æquilaterum dato circulo.*

Ut hic,

Ut hic, quia latera erunt subtensa peripheriis æqualibus. Itaque per 19 e 15 æqualia, & vicissim per tale triangulum bisectis angulis sexangulum inscribitur.



7. *Latus inscripti trianguli æquilateri potest triplum circularis radii.* 12 p. 13.

Ut hic trianguli *aei* uno latere *ae* duæ tertiæ semiperipheriæ occupantur: Nã uno latere occupatur una tertia totius peripheriæ *eu*, ideo est tertia reliqua, id est sexta totius peripheriæ. Itaq; *eu* inscripta est radius per 6 e. Jam diameter *aou* per 7 e 12 potest quadruplum radii, id est ipsius *eu* & per 18 e 16 & 5 e 12 quadruplum idem possunt *ae* & *eu*: tolle *eu* latus *ae* poterit triplum radii. Atque hæc de sexangula figura, id est apum geometria. Apis enim (ut ait Varro de re rustica lib. 13 cap 16) sexangulam cellam sibi architectatur, quot habet ipsa pedes, quod geometræ ἑξάγωνον fieri in orbi rotundo ostendunt, ut plurimum loci includatur, quod idem Pappus & geometrice & copiose demonstrat in proœmio quinti libri. Reliquis multangulis & eorum multiplis opus esset triangulo utriusque ad basim anguli ad reliquum tripli in septangulo, quadrupli in nonangulo, & sic deinceps: in cujus inventione veteres geometræ elaborarunt. Quidam (inquit Proclus ad 9 p 1) ab Archimedis helicibus incitati in datam rationem datum angulum rectilineum secuerunt, quorum considerationes iis qui instituuntur contemplatu difficiles, cum sint in præsentia omittimus. Hæc ille. Geometricos autem conatus illos libuit curiosorum gratia in scholis proponere.



8. *Si latus sexanguli secetur proportionaliter, majus segmentum erit latus decanguli.*

Pappus lib. 5 th. 24. & Camp. ad 3 p 14. Secetur enim *ao* radius seu latus sexanguli per 3 e 14 proportionaliter, & sit *ae* æqualis majori segmẽto. Dico *ae* latus esse decanguli: Nam si continuetur deinde toto radio in *i* tota *aei* per c 3 e 14 secabitur proportionaliter, & majus segmentum *ei* erit ipse radius. Nam si recta *iea* secta est proportionaliter, est ut *ia* ad *ie*, id est *oa* nempe ad radium, sic *ao* ad *ae*. Itaque per 11 e 7 triangula *iao* & *oae* sunt æ-



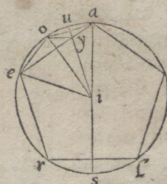
quian-

quiangula, & angulus *aoe* æquatur angulo *oia*. At angulus *uoe* eſt quadruplus anguli *aoe*: æquatur enim duobus interioribus ad *a* & *e* per 2 c 9 e 6 æqualibus inter ſe per 3 c 5 e 5 & per 10 e 6, & ideo duplus eſt ipſius *aeo* dupli per eandem cauſſam ipſius *aio* æqualis ipſi *aoe*. Itaque *uoe* eſt quadruplus ipſius *aoe*: Itaque *ae* eſt quadrupla peripheriæ *ea*. Ergo tota *uea* eſt quintupla ipſius *ea*, totaque peripheria decupla. Ideoque ſubtenſa eſt latus decanguli. Itaque

Si decangulum & ſexangulum inſcribantur eidem circulo, recta è latere utriuſque continuata ſecabitur proportionaliter, & majus ſegmentum erit latus ſexanguli: & ſi majus ſegmentum rectæ proportionaliter ſectæ eſt latus ſexanguli, reliquum erit latus decanguli. 9 p 13.

Comparatio ſequitur decanguli & ſexanguli cum quinquangulo.

9. *Si decangulum, ſexangulum, quinquangulum inſcribantur eidem circulo, latus quinquanguli poteſt latera reliquorum: & ſi recte poteſt latera ſexanguli & decanguli, eſt latus quinquanguli.* 10 p 13.



Eſto latus inſcripti quinquanguli *ae*, ſexanguli *ei*, decanguli *ao*. Dico latus *ae* poſſe reliqua. Sunto enim perpendiculares duæ, prima *io*, ſecunda *iu* biſecantes latera quinquanguli & decanguli, & concurſus ſecundæ perpendicularis cum latere quinquanguli ſit *y*. Demonſtrationis ſyllogiſmus eſt hic. Oblonga è latere quinquanguli & ejus ſegmentis æquantur quadratis reliquorum laterum: ſed quadratum ex eodem toto latere æquatur oblongis è toto, & ſegmentis per 3 e 13: æquatur igitur & quadratis reliquorū laterum. Demonſtretur ſyllogiſmi propoſitio. Hæc enim pars ſola dubia eſt. Duo igitur triangula *aei* & *yei* ſunt æquiangula communi angulo ad *e* item æqualibus *eai* & *eiy* dimidii nempe ejuſdem *eis*, quia ille eſt per 10 e 6, alter duorum æqualium, quibus *eis* exterior æquatur 2 c 9 e 6: & hic in dimidiam peripheriam inſiſtit. Nam ſemiperipheria *als* æquatur ſemiperipheriæ *ars*, item *al* ipſi *ar*. Reliqua igitur *ls*, reliquæ *rs*, & tota *rl* dupla eſt ipſius *rs*: Ideoque *er* dupla eſt ipſius *eo*: & *rs* dupla ipſius *ou*. Nam biſegmenta patent per 7 e 15 & 9 e 16. Itaque peripheria *ers* dupla eſt peripheriæ *eou*, & ideo angulus *eiu* eſt anguli *eis* per 6 e 16 dimidius: bini igitur anguli duorum triangulorum æquantur. Itaque reliquus per c 3 e 7 reliquo. Quare per 9 e 7, ut latus *ae* ad *ei*, ſic *ei* ad *ey*. Itaque per 4 e 12 oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ. Jam connectantur *oy*, duo rurſus triangula *aoe* & *aoy* æquiangula ſunt communi angulo ad *a*, itemque *aoy* & *oea* ideo æqualibus, quia ambo æquantur angulo ad *a*, ille per 10 e 6, hic per 2 e 7, quia perpendicularis biſecans latus decanguli facit duo triangula æquicrura & æqua recto angulo crurum: ideoque æquiangula. Itaque ut *ea* ad *ao*, ſic *ea* ad *ay*. Quare per 4 e 12 oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ, propoſitioque ſyllogiſmi vera eſt, quod demonſtraſſe oportuit. Converſam huic manifeſtam uſurpat Euclides 16 p 13.

10. *Si triangulum & quinquangulum inſcribantur eidem circulo ad idem punctum, recta inſcripta inter utriuſque baſim dicto puncto oppoſitam erit latus inſcripti quindecanguli. 16 p 4.*

Latus enim trianguli ſubtendet $\frac{1}{3}$ totius peripheriæ: duo



latera quinquanguli ſubtendent $\frac{2}{5}$, é quibus ſi tollas $\frac{1}{3}$ relinquetur $\frac{1}{15}$. *Itaque*

Si quinquangulum & ſexangulum inſcribantur eidem circulo ad idem punctum, peripheria inter utriuſque latera erit pars triceſima totius peripheriæ.

Ut hic: itaque triangulatorũ ordinatorum quadrati, quinquanguli, ſexanguli, decanguli, quindecanguli inſcriptio prompta erit latere unico, quod repetitum quoties opus eſt, peripheriam totam ſubtendat.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XIX.

de geodæſia multanguli ordinati & circuli.

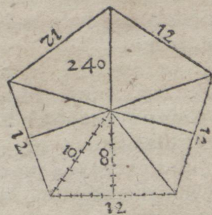
Ex adſcriptione circuli & rectilinei geodæſia ducitur multangulorũ ordinatorũ, atque imprimis ipſius circuli. Concurſus enim biſecantiũ duos angulos eſt centrum circumſcripti circuli, ab eoque ad angulum radius, tumque ſi quadratum é dimidio lateris tollatur é quadrato de radio, latus reliqui erit perpendicularis per 5 e 12. Itaque ſpeciale theorema hic ita inſtituitur.

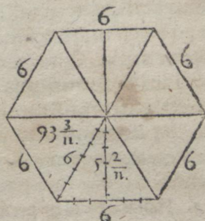
1. *Planus é perpendiculari á centro in latus & dimidio perimetri, eſt area multanguli ordinati.*

Ut hic quadratum é 10 radio eſt 100, quadratum é 6 dimidio lateris 12 eſt 36,

quo illinc

quo illinc deducto reliquum 64 est quadratum perpendicularis, cujus latus 8 est ipsa perpendicularis, ex qua & 24 dimidio perimetri planus est 240 area quinquanguli. Demonstratio hic etiam est certæ illius antecedentis caussæ. Nam de quinque triangulis in quinquangulo planus é perpendiculari & dimidio basis est unum, ut ante patuit, quintuplex igitur facit totum: Atqui illa multiplicatio est perpendicularis per semiperimetrum. In sexangulo ordinato etiam radius per 4 e 18 notus est é latere sexanguli: Ut hic quadratum é radio 6 & 36, quadratum é 3 dimidio lateris est 9, quo illinc sub ducto reliquum est 27 quadratum perpendicularis: latus est $5\frac{2}{11}$ perpendicularis ipsa ex qua & 18 semiperimetro planus est $93\frac{3}{11}$ area sexanguli. Denique in omnibus multangulis ordinatis theorema satisfaciet. Atque hæc geodæsia est multanguli ex adscriptione, unde etiam est dimensio circuli, τετραγωνισμὸς quadratura circuli vulgo dicitur: argumentum geometris omnium fere ætatum propositum, in quo sese exercerent. Bryso, Antipho, Euclides, Archimedes, Apollonius, Porus, atque é recentioribus Boetius, Campanus, Cusanus, Regiomontanus, Orontius hic elaboravere. Quidam etiam τετραγωνισμὸν imposibilem credidere. Quæstionis nodus est in ratione diametri & peripheriæ.





2. *Peripheria est tripla diametri & fere sesquiseptima.*

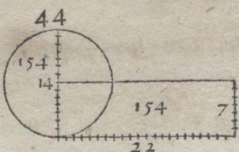
Hæc ratio ut apud Heronē est Euclidi & antiquis geometris nota fuit. Quod enim tripla sit, sex radii, id est tres diametri indicant, quibus peripheria per 6 e 18 est circumscripta, & ideo quia continens major, sed excessus non plané est sesquiseptima. Deest enim unitas unius septimæ, & excessus idem longe major est quam sesquioctava. Itaque quia differentia vicinior erat sesquiseptimæ, assumpta est sesquiseptima: vero quippe propinquum pro ipso vero. Demonstratio Archimedis valde operosa est: si quis tamen curiosius requirat, materiam exercendi ingenii prorsus Archimedeam é scholis accipito.



Itaque

1. *Planus é radio & peripheriæ dimidio est area circuli.*

Hic enim 7 radius é dimidio diametri 14 multiplicans 22 dimidium peripheriæ 44 facit 154 oblongum: in diametro autem duo latera



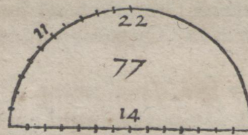
opposita, item in perimetro duo reliqua opposita rectanguli continentur. Itaque binorum dimidia duntaxat assumuntur, á quibus comprehenditur rectangulum. Et

2. *Ut 14 ad 11, sic quadratum diametri ad circulum.*

Hic enim tres proportionis termini dantur potestate: quartus multiplicatione tertii per secundum & facti divisione per primum invenitur, ut hic quadratum é diametro 14 est 196. quo per 11 multiplicato factus 2152 dividatur per 14, quotus erit 154 pro quæsito circulo, quod é dimensis quadrato & circulo per analysin nascitur. Nam ratio 196 ad 154 est ratio 14 ad 11, ut reductis terminis apparet. Hic vero secundus τετραγωνισμὸς Euclidis est apud Heronem, sed paulo secus propositus hoc modo. Si de quadrato diametri tollantur $\frac{3}{14}$, relinquetur area circuli: ut si 196 quadratum dividatur per 14, quotus erit item 14, quæ ter sumpta sunt 42, & sublata de 196, relinquunt 154 quadratum æquale circulo. Quadratura igitur Euclidis ista Archimede antiquior est, & jucundum sit ab antiquis geometris istam geodæsiam repetere, & tot Euclideis exemplis demonstrare geodæsiam geometrarum ingeniis nequaquam alienã esse: sed demonstratio rationis inventa ab Archimede laudem rationis etiam archimedeam fecit. Ex eadem illa peripheriæ & diametri ratione nascitur dimensio circularium partium semicirculi, sectoris, sectionis, majoris minoris. Et

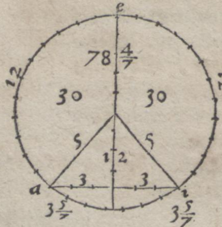
3. *Planus é radio & peripheriæ quadrante est area semicirculi.*

Ut hic vides: factus enim á 7 radio multiplicãte 11 quadrante facit 77. Potest & ista dimensio fieri sumpto dimidio dimensi jam circuli. Et



4. *Planus é radio & basis dimidio est area sectoris.*

Hic tres sunt sectores *ae* basis 12 pedum, *ei* item 12 pedũ, reliquus *ia* $7\frac{3}{7}$, diameter 10, multiplica 5 per 6 factus erit 30 pro primo sectore, quãtus erit & secundus: multiplica item 5 per $3\frac{5}{7}$, quotus erit $18\frac{4}{7}$, é quibus additis redditur circulus $78\frac{4}{7}$. Et



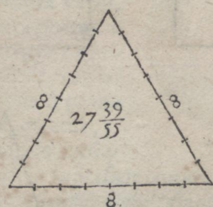
5. Si trian-

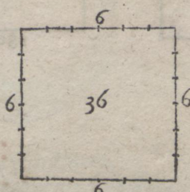
5. *Si triangulum é duobus radiis & basi majoris sectionis addatur duobus in ea sectoribus, totum erit area sectionis majoris: sin detrahatur suo sectori reliquum erit area minoris.*

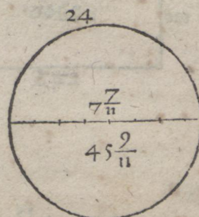
Adde ad sectores *a e*, & *e i* triangulum, ut in eodem exemplo *a o i* pedum 12, totus erit 72 area majoris sectionis, tollatur idem de $18\frac{4}{7}$ tertio sectore, $6\frac{4}{7}$ reliquum erit area minoris sectionis. Et

6. *Circulus é planis isoperimetris inæqualibus est maximus.*

Quippe qui sit ordinatissimus & terminatissimus, ut circulus *a* perimetri 24 est major rectilineo isoperimetro, ut quadrato e triangulo *i*.

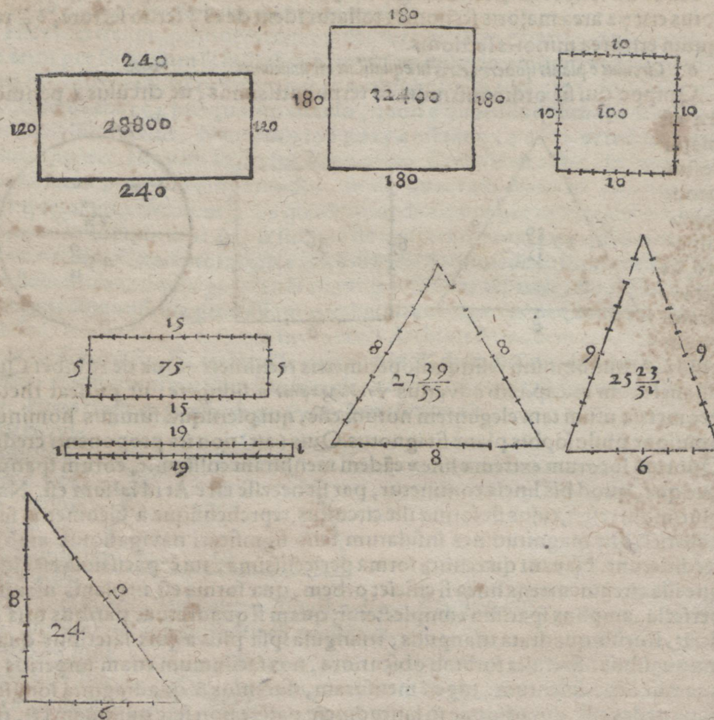






Atque omnino reliquis isoperimetris rectilineis. Qua de re lubet Quintiliani locum 10 cap. 1 lib adversus ψευδογραφίας adjungere, ut pudeat rhetori geometriæ usum tam elegantem notum esse, qui plerisque summis hominum opinione philosophis plane sit ignotus. Quis (ait) non ita proponenti credat? Quorum locorum extremæ lineæ eãdem mensuram colligunt, eorum spatium quoque, quod his lineis continetur, par sit necesse est? At id falsum est. Nam plurimum refert, cujus sit formæ ille circuitus, reprehensique á Geometris sunt historici, qui magnitudines insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt. Nam ut quæcunque forma perfectissima, ita capacissima est: Ideo que illa circumcurrens linea si efficiet orbem, quæ forma est in planis maxime perfecta, amplius spatium complectetur, quam si quadratum paribus oris efficiat. Rursus quadrata triangulis, triangula ipsa plus æquis lateribus quam inæqualibus. Sed alia forsitan obscuriora, nos facillimum etiam imperitis sequamur experimentum. Jugeri mensuram, ducentos & quadraginta longitudinis pedes esse, dimidioque in latitudinem patére non fere quisquam est, qui ignoret: & qui sit circuitus, & quantum campi claudat colligere expeditum. At centeni & octogeni in quamque partem pedes, idem spatium extremitatis, sed multo amplius clausæ quatuor lineis areæ faciunt. Id si computare quem piget, brevioribus numeris idem discat: Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram, intra centum erunt. At si quindeni per latera, quini in fronte sint: ex illo quod amplectuntur, quartam deducent eodem circumductu. Si vero porrecti utrinque undeviceni singulis distent non plures intus quadratos habebunt, quam per quot longitudo ducetur: quæ circumibit autem linea, ejusdem spatii erit cujus ea quæ centum continet. Ita quidquid formæ quadrati detraxeris, amplitudini quoque peribit. Ergo etiam id fieri potest, ut majore circuitu minor loci amplitudo claudatur. Hoc in planis. Nam in collibus

vallibusque etiam imperito patet plus soli esse quam cæli: Exempla rem subjiciunt oculis.



P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XX.

de superficie gibba.

Gibbum est superficies quæ inæqualiter intra suos terminos interjacet.

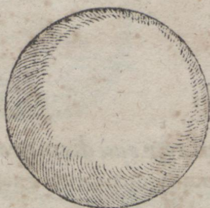
Superficies plana adhuc amplissime proposita est, ex cujus contrario gibba possit intelligi: atque ut antea planum pro superficie plana, sic modo gibbum pro superficie gibba dicatur: nec tamen gibbum quodlibet modo definitur, sed quod sectum plano basi parallelo faciat communi sectione peripheriam. Id si lubet regulare nominetur.

2. Gib-

2. *Gibbum est sphæricum aut varium.*

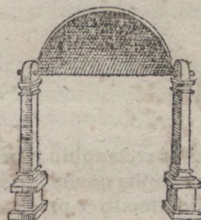
Partitio respondet partitioni lineæ in peripheriam & helicem.

3. *Sphæricum est gibbum æquidistans á centro comprehensi spatii.*



Sic antea peripheria definita est, nominatur autem sphæricũ á sphæra inopia verbi, cum sphæra potius á sua superficie nominari debuerit, ut planum corpus á plana superficie dicetur, quæ nominis hysterologia erit in superficie conica & cylindracea. Itaque

Fit conversione semiperipheriæ manente diametro, é 14 d 11.



Ut hic si spatium inter peripheriam & diametrum inane cogites. Atq; ut recto motu lineæ rectæ efficitur planum, sic motu peripheriæ efficitur sphæricum: Atque ut locis omnibus recta in plano, sic peripheria in sphærico duci potest.

4. *Maxima in sphærico peripheria est quæ sphæricum bisecat.*

Quæ de rectis in circulo præcipiuntur, eadem fere huc referuntur, & quidem circulorum sphæræ inscriptorum nomine, qui cum sphæra in plano considerantur, lineis etiam adumbrantur, & tamen qui circuli in sphæra considerantur, peripheriæ revera sunt in sphærico. Sic igitur Euclides 17 p 13 postulat maximum sphæræ circulum esse, qui transit per centrum, id est qui sphæram bisecat. Maxima itaque peripheria sphærici respondet diametro circuli. Itaque

Peripheria propior maximæ est major remotiore, & utrinque æquidistantes á maxima duæ sunt æquales.

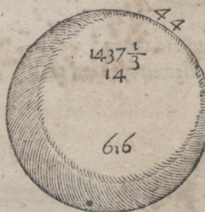
Simillima

Simillima enim hic repeti posſũt iis quæ 12. 13. 14 e 15 proponuntur, Ut hic.



5. *Planus é maxima peripheria & ejus diametro est ſphæricum.*

Geodæſia ſphærici & ſphæricorum ſegmentorum analogia quadam reſpondet geodæſiæ circulari. Sic igitur planus ſphærici é diametro 14 & peripheria 44 eſt ſphæricum 616. Sic antea circuli area eſt dimenſa per rectãgulũ é tum dimidio diametri, tum peripheriæ. Hic vero per



totam & diametrum & peripheriam efficitur rectangulum prioris quadruplũ pro menſura ſphærici, quia per 1 e 6 plana ſimilia qualia hic cogitantur é dimidio & diametri & peripheriæ, é que tota & diametro & peripheria, ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. Itaque

1. *Planus é maximo circulo & 4 eſt ſphæricum.*

Conſectarium patet ex elemento proximo. Archimedes de ſphæra demonſtrat, ſed præpoſtere é conis ſphæricum æquari quatuor maximis circulis. Et

2. *Ut 7 ad 22, ſic quadratum diametri ad ſphæricum.*

Nam 7 & 22 duo ſunt termini minimi in ratione diametri ad peripheriam: in circulo autem ut 14 ad 11, ſic quadratum diametri ad circulum. Analogia reſpõdet, quia hic multiplicas per duplum, & dividis per dimidium: Illic contra multiplicas per dimidium, dividis per duplum. Itaque illic circulus ſimplex efficitur, hic quadruplus. Hæc igitur analogia eſt circuli & ſphærici, ex qua etiam eſt hemiſphæricum, ſectio major, minor. Et

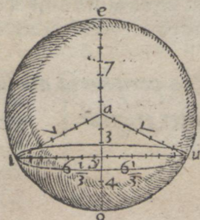
3. *Planus é maxima peripheria & radio eſt hemiſphæricum.*

Ut hic erit 308.

6. *Si quota pars eſt radii perpendicularis á centro ad baſim ſectionis majoris, tanta augeatur hemiſphæricum, totum erit ſphærici major ſectio: ſin tanta minuatur, reliquum erit minor.*

Ut in

Ut in exemplo pars radii tertii, id est $\frac{3}{7}$ est à centro, quanta pars hemisphæri-ci 308 est 132. Additis igitur 132 ad 308 cõponêtur 440 pro spherici majore sectione: Detractis autem relinquentur 176 pro sphærici minore sectione.



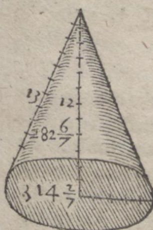
7. *Varium est gibbum, cujus basis est peripheria, latus recta á termino verticis in terminum basis.*

Hæc affectio duplex est communis superficierum variarum regularium: ut patet 18.20.21.23 d 11. Infinitæ vero sunt species ut helicis, sic varii, sed ab Euclide ex omni numero, duæ species selectæ sunt, quas generali affectione complectimur.

8. *Varium est conicum aut cylindraceum.*

Hæ nimirum geometris species duæ placuerunt: atque ut antea planum & sphæricum pro superficie plana & sphærica, ita modo conicum & cylindraceum pro superficie conica & cylindracea intelligantur.

9. *Conicum est quod á subjecta peripheria æqualiter fastigiatur ad verticem.*



Fit conversione lateris circa subjectam peripheriam.

Quod ab Apollonio propositum primo conicorum repetitur á Proclo ad 4 d 1.

10. *Planus é latere & dimidio basis est conicum.*

Ut in exemplo superiore latus est 13, semiperipheria 15$\frac{5}{7}$, unde planus est 204$\frac{2}{7}$

superficies conica: cui si addideris subjectum circulum, tota superficies constabit. Quæ vero de primarum figurarum æqua altitudine & reciprocatione dicta sunt, conicis etiam possint attribui, indeque cylindraceis, tametsi ab Euclide hæc præterita sint in superficie.

II. *Cylindraceum est quod á subjecta peripheria ad sublimem æqualem & parallelam peripheriam æqualiter erigitur.*



Itaque

Fit conversione lateris circa duas peripherias æquales & parallelas.

Hoc enim modo fabricatur Serenus.

12. *Planus é sua basi & altitudine est cylindraceum.*

Ut hic peripheria 22, ut colligitur é 7 diametro, altitudo 12. Planus igitur cylindracei est 462, quibus si addideris duas utrinque bases, bis nempe $38\frac{1}{2}$ vel 77, tota superficies erit 539. Quamobrem hæc paucula sunto de superficie gibba.

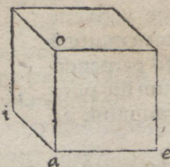
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXI.
de lineis & superficiebus in solido.

HActenus geometria fuit de linea & superficie: superest stereometria pars artis altera de corpore: stereometria est in elementis exigua, & Plato 7 de repub. conqueritur hanc scientiam nondum inventam, & quidem duabus de caussis, quia difficilis, quia contempta: ideoque publicis honoribus & præmiis excellentia ingenia excitanda ad tantæ rei indagationem. Itaque Platonis velut authoritate permoti Archimedes., Theodosius, Apollonius, Serenus, Pappus in vacuas possessiōis hujus partes ingressi mirabiles structuras fecere: Archimedes in libris de sphæra & cylindro, de conoidibus, sphæroidibus, quadratura parabolæ, Theodosius in libris de sphæra, Apollonius in libris de conicis, Serenus in libris de sectione cylindri, Pappus in variis plerisque, unde Euclidis inopia possit expleri.

1. *Corpus est lineatum latum & altum.* 1 d 11.

Longitu-

Longitudo enim sola est lineæ, longitudo & latitudo est superficiei, longitudo, latitudo, altitudo simul est corporis, & hæc magnitudinis trina perfectio est corporis, qua intelligimus in corpore non solum lineas longitudinis & superficies latitudinis, sic enim corpus é lineis & é superficiebus constaret, sed soliditatem in longũ, latum, altum concipim⁹. Pars enim corporis quælibet etiam corpus est. Itaque etiam solidum pro corpore ipso intelligimus: ut in corpore *aeio* longitudo est *ae*, latitudo est *ai*, altitudo est *ao*.



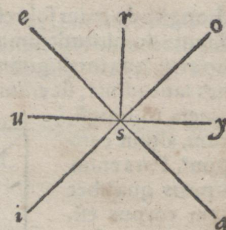
2. *Terminus solidi est superficies.* 2 *d* 11.

Terminus lineæ est punctum, neque punctum tamen est linea aut lineæ pars ulla, terminus superficiei est linea, neque tamen linea est superficies, aut superficiei pars ulla, sic modo terminus corporis est superficies: neque superficies tamen est corpus aut corporis pars ulla: aliud est magnitudo, aliud terminus magnitudinis: ut patuit 5 e 1: ut vero lineæ planæ jam dictæ sunt quæ spectantur in plano, sic solidæ & lineæ & superficies appellantur, quæ considerantur in solido, earumque perpendiculum & parallelismus é simplicibus lineis repetuntur.

3. *Si recta est rectis in subjecto plano intersectis perpendicularis in cõmuni sectione, est perpendicularis subjecto plano: & si est perpendicularis plano, est rectis in subjecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione.* e' 3 *d* & 4 *p* 11.

Perpendiculum lineis in superficie consideratis attributum est antea. Itaque inde repetitur consectarium de perpendiculo lineæ cum superficie ipsa. Duæ lineæ sunt perpendiculares, quarum altera in alteram incidens æqualiter interjacet, & eadem definitione intelligimus sublimem lineam infinitis lineis in plano intersectis incidentem in communi puncto perpẽdicularem esse ipsi plano, quia æqualiter in omnes partes interjaceat, & singulis intersectis lineis concipimus singula plana cum sublimi communia, ut sublimis & quælibet intersectarum sint in eodem plano perpendiculares, sublimisque linea plano subjecto ideo sit perpendicularis, quia in eodem puncto est perpendicularis omnibus rectis quacumque parte sumptæ fuerint: ut si cogites rectas *ae*, *io*, *uy*, in subjecto plano intersectas in communi sectione *s*: & sublimem *sr* singulis esse perpendicularem in communi puncto *s*, exemplum habebis consectarii. Itaque

perpendiculum lineæ ad planum subjectum est é lineis in uno plano,& consectarium modo est é principe illa definitione reciprocum, neque linearum numerus hic certus definitur. Nam si de duabus est verum, est omnino verum de infinitis : quatuor enim anguli recti subjectarum cum sublimi æquabilẽ statum demonstrabunt. Intelligatur tamen minimũ de duabus subjectis in communi puncto perpendiculum. Communis autem sectio linearum hic punctum dicitur, ut dicitur ab Euclide nominatim ad 4 & 5 p 11.

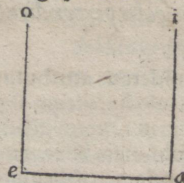


4. *Si tres rectæ intersectæ sunt eidem rectæ perpendiculares in communi sectione, sunt in eodem plano.* 5 p 11.

Ex perpẽdiculo enim & communi sectione intelligitur æqualis in omnes partes status, propterea que planicies eadem: ut in superiore exemplo *as.ys,os* sint eidem sublimi *sr* perpendiculares, erunt in eodem subjecto *aiueoy*. Atque hæc de perpendiculo sublimi, unde contraria obliquitas intelligitur vel inclinationis in angulo acuto, vel declinationis in obtuso, quæ est 5 & 6 d 11: item similium inclinationum ex æqualibus angulis quæ est 7 d 11: parallelismus consequitur, qui tametsi permiscetur cum solido perpendiculo, consideratur tamen semper in uno plano.

5. *Si duæ rectæ sunt perpendiculares subjecto plano, sunt parallelæ: & si parallelarum altera est perpendicularis subjecto plano, reliqua est eidem perpendicularis.* 6.8 p 11.

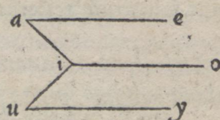
Caussa est é prima lege parallelismi. Nam si duæ rectæ sunt eidem subjecto plano perpendiculares, connexæ recta interiores angulos æquabunt duob. rectis, propterea que parallelæ erunt per 12 e 5: & si in parallelis connexis alter interior angulus rectus sit, reliquus etiam rectus erit, quia communi perpendiculo dividuntur: ut in exemplo. Si anguli ad *a* & *e* sunt recti, *ai* & *eo* sunt parallelæ, & contra si parallelæ sint *ai* & *eo*, & angulus ad *a* sit rectus, etiam ad *e* rectus erit.



6. *Si rectæ in diversis planis sunt ad eandem rectam parallelæ, sunt inter se parallelæ.* 9 p 11.

Ut hic

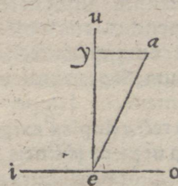
Ut hic sint rectæ *ae* & *uy* in diversis planis ad *io* parallelæ, erunt inter se parallelæ. Nam á puncto *i* perpendiculares per 9 e 5 sunto *ia* & *iu*. Itaque per 3 e *oi* cum sit perpendicularis duabus



intersectis *ia* & *iu*, est perpendicularis subjecto plano. Ergo per 6 e *yu* & *ea* sunt perpẽdiculares eidem plano, ideoque per idem sunt parallelæ. Hæc Euclidis est demonstratio: postulari tamen id potuit.

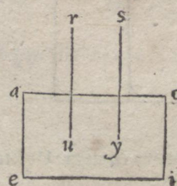
7. *Si duæ rectæ sint perpendiculares, prima á sublimi puncto in rectam subjectam, secunda á communi sectione in subjecto plano, tertia á dicto puncto perpendicularis secundæ erit perpendicularis subjecto plano.* é 11 *p* 11.

Consectarium est é 3 e. Ut si á puncto sublimi *a* sit per 10 e 5 perpendicularis *ae* in *e* punctum subjectæ rectæ *io*, & ab *e* communi sectione per 9 e 5 sit altera perpendicularis *eu*, denique *ay* sublimis recta sit per 10 e 5 perpendicularis in *eu* ad punctum *y*, *ay* perpendicularis erit subjecto plano. Nam quod *ae* perpẽdicularis est ipsi *io* ipsa *ae*, neq; dextrorsum neq; levorsum acclinat per 10 e 2. & quod iterum *ay* perpendicularis ipsi *eu*, neque prorsum neque retrorsum pendet. Itaque in quatuor partes interjacet æqualiter. Denique si recta *io* paribus angulis congruat ipsis *r* tertium elementum redierit.



8. *Si recta á dato subjecti plani puncto sit parallela rectæ ad idem planum perpendiculari, erit etiam perpendicularis subjecto plano.* ex 12 *p* 11.

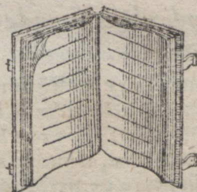
Ut esto planum *aeio*, & datum punctum in eo situ, unde sublimis perpendicularis sit erigenda, fiat á puncto *y* perpendicularis *ys* in subjectum planum per 7 e, & ei parallela statuatur *ur* per 3 c 12 e 5. Jam *ur*, cum sit parallela perpendicu



lari in subjectum planum, erit eidem per 6 e perpendicularis. Sic igitur est perpendiculum & parallelismus solidarum rectarum: sequitur de planis solidis utrumque.

9. *Si recta in altero intersectorum planorum perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo, plana sunt perpendicularia: & si plana sunt perpendicularia, recta in altero perpendicularis communi sectioni est perpendicularis reliquo. é 4 d & 38 p* II.

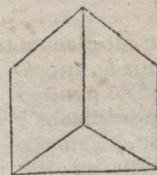
Perpendiculum planorum é proxima perpendiculi ratione ducitur, planorumque inter se æqualis utrinque status est é rectæ in planum perpendiculo, quia hinc intelligitur planum ipsum æqualiter in omnes partes lineis rectis nẽpe significatas interjacere, quod in libro duabus utrinque paginis aperto percipitur é versibus paginarum sectioni & subjecto plano perpendicularibus: Ut hic vides. Hic igitur duo sunt, ut prius communis sectio & planum: antea ut recta sublimis esset perpendicularis subjecto plano, cadebat in communem sectionem duarum rectarum, & perpendicularis erat rectis in ea intersectis. Hic perpendiculum ejusdem rectæ duplex exigitur, primum in cõmunem sectionem, quæ est non punctum ut prius in lineis, sed linea recta, terminus est linea, & planicies ipsa prius explorata est intra duas rectas. Secundum est in subjectum planum.



10. *Si recta est perpendicularis plano, omnia per eam plana, sunt eidem perpendicularia: & si duo plana intersecta sunt alicui plano perpendicularia, communis sectio est eidem perpendicularis. é 15 & 19 p* II.

Hæc elementa separatim ab Euclide proponuntur & citantur: Prius tamen est consectarium 9 e, & posterius ex eo patet, quod communis ipsa sectio sit recta in quolibet intersectorum sublimium planorum perpendicularis & communi sectioni, & subjecto plano. Nam si communis sectio non esset subjecto plano perpendicularis, neque intersecta plana essent subjecto plano perpẽdicularia, sed aliquod esset obliquum contra thesim: Ut hic vides. Atqui hoc perpendiculum est planorum, parallelismus superest.





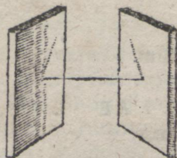
11. *Plana*

11. *Plana sunt parallela quæ nusquam annuunt.* 8 d 11.

Parallelismus planorum é non concursu verus est, sicut rectarum in eodem plano ad 11 e 5, quamvis linearum omnium nequaquam sit, quales in conico asymptotas proposuimus primo libro. In parietibus & tabulatis ædium æquidistantibus parallelismus planorum agnoscitur.

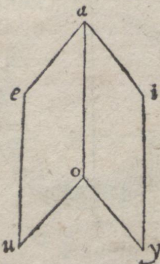
12. *Quæ communi perpendiculo dividuntur.* 14 p 11.

Consectarium est é 3 & 6 e. Nam si media recta est perpendicularis utrique plano, est etiã rectis utrinque intersectis perpẽdicularis in communi sectione, & recti utrinque interiores anguli parallelismum cõvincent. Est item é definitione ipsa parallelismi ad 11 e 2.



13. *Si binæ rectæ in ipsis conterminæ, sunt parallelæ.* 15 p 11.

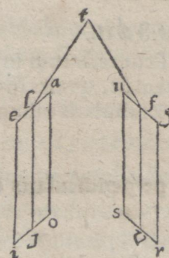
Tales sunt oppositi parietes in fastigio ædium. Ut sunto *eai* & *uoy* plana quæ habeant binas rectas *ea* & *ia*, item *uo* & *ys* conterminas in *a* & *o* & parallelas nempe *ea* contra *uo* & *ia* cõtra *yo*: Dico plana ipsa parallela. nam rectæ *ue* & *oa*, item *yi* & *oa* connectant æquales parallelas, erunt per 6 c 12 e 5 æquales & parallelæ, & sic parallelismum & æquidistantiam indicabunt. Idem vero fuerit si conterminas cogites infinite extendi, plana quoque extensa erunt infinite parallela.



14. *Si duo plana parallela secantur plano, communes sectiones sunt parallelæ.* 16 p 11.

Ut hic vides plana parallela *aeio* & *uysr* secta per planum *ljvf*, communes sectiones

sectiones l j & f v erũt parallelę, secus ipsæ, ideoq; & plana in quib.



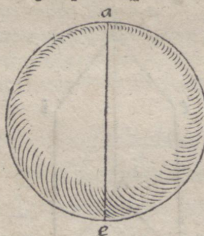
sunt, concurrent, ut in puncto *f* contra thesim.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXII. *de pyramide.*

STereometria rectarum & planorum ita est: sequitur solidorum ipsorum stereometria.

1. *Axis solidi est diameter circa quam convertitur é.* 15.19.22 *d* 11.

Axis vulgo putatur esse proprius sphæræ: Ut hic *ae*: verum etiam attribuitur cono & cylindro, & solido plano, & ordinatis tetraedro, hexaedro, octaedro, icosaedro, dodecaedro, & conversionis motus nominatim exprimitur, ut hic motus geometricus intelligatur: & sic axis in conoidibus & sphæroidibus dicitur.



2. *Solidum rectum est cujus axis est perpendicularis centro basis.*

Sic conus, sic cylindrus rectus Apollonio & Sereno definiuntur, & hos solos Euclides consideravit: imo solidum nullum nisi rectum geodæsia suscipit. Itaque generaliter de omni solido id intelligi potest: & aptius est ad Euclidis stereometriam.

3. *Si solida comprehenduntur á superficiebus homogeneis æqualibus multitudine & magnitudine, sunt æqualia.* 10 *d* 11.

Aequalitas linearum & superficierum nullo præcipuo axiomate instructa est, sed præsumpta est ex logico & communi sensu, & in plerisque ἐφαρμόσεις illic satis

lic satis esse potuit. Hic vero ἐφάρμοσις corporum fit per superficies. Euclides tãtum de planis loquitur, stereometria tamen de quibuslibet solidis vera est. Duo cubi sunt æquales, quorum senæ superficies planæ sunt æquales: duæ sphæræ sunt æquales, quarum superficies sunt æquales: duo coni cylindrique sunt æquales, quorum superficies superficiebus, bases basibus sunt æquales: neque tamen hinc dixeris isoperimetra solida quælibet esse æqualia: fallere enim possit in heterogeneis, neque id modo postulatur, sed ex æquali superficierum & multitudine & magnitudine æqualitas solidorum dijudicatur.

4. *Si solida comprehenduntur á superficiebus multitudine æqualibus & similibus sunt similia. 9 d 11.*

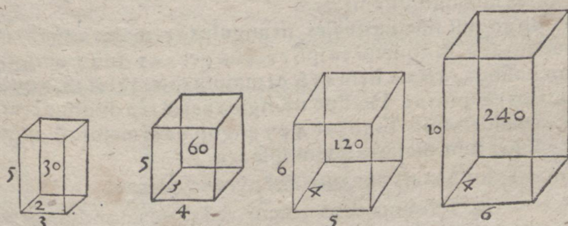
Consectarium est é generali definitione similium figurarum ad 14 e 4. figuræ enim similes illic definitę sunt æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum: At in solidis planis similibus anguli æquantur ex similitudine planorum similium, & crura æqualia sunt ipsæ planæ superficies, & ideo proportionales, æquales, & similes.

5. *Solida similia habent triplicatam rationem homologorum laterum, & duo media proportionalia. 33 p 11. 8 p 12.*

Consectarium est 15 e 4. ut exemplum repetitum indicabit.

6. *Solidum est planum vel gibbum.*

Differentiæ planorum á terminis suis assumptæ sunt, á lineis enim rectis & obliquis rectilinea & obliquilinea facta sunt, ita corporum differetiæ sunt á suis item terminis, inde plana vel gibba nominantur.



7. *Planum, quod comprehenditur á superficiebus planis.*

Ut planum εὐθύγραμμον rectilineum dicitur, ita solidum si compositio pateretur, ἐπιπεδοέδρον tanquam dicas planifacium diceretur, quod facies habeat planas: sic enim tetraedrum, hexaedrum, & cæteræ species compositis nominibus nominantur. Planum corpus distinguitur á numero planorum, quæ ἕδραι sunt, unde tetraedrum, pentaedrum, hexaedrum, basis etiam pro hedra dicitur. Plani rectilinei differentiæ fuerunt á numero laterum vel angulorum, unde trilaterum, quadrilaterum, multilaterum, vel triangulum, quadrangulum, multangulum.

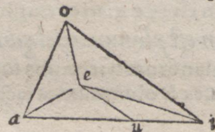
gulum. Sic corporis plani differentiæ sunt á numero terminorum, quos hedras diximus appellari, sed aliter quam in planis series perpetua est in pyramide á quaternario: in pyramidato autem á quinario. Numerus angulorum numero terminorum non perpetuo respondet, pyramis tetraedra, pentaedra, polyedra, est quidem quadrangula, quinquangula, multangula, sed prisma pentaedrum est sexangulum, hexaedrum, octangulum, & sic deinceps.

8. *Anguli plani comprehendentes angulum solidum sunt minores quatuor rectis.* 21 *p* 11.

Nam si quatuor rectis æquarentur, complerent locum planum per 4 c 10 e 6, neque omnino angulum facerent, multoque minus si majores.

9. *Si tres anguli plani minores quatuor rectis comprehendant angulũ solidum, duo quilibet sunt majores reliquo: & si duo quilibet sint majores reliquo, comprehendent angulum solidum.* 20 *&* 23 *p* 11.

Analogia est ad 7 e 6, & caussa etiam in promptu est. Nam si duo plani anguli essent æquales reliquo, nullum spatium medium cum reliquo cõcluderẽt, quin si cogites congruere cruribus planum congruentia sua facerent è duob. unum: multo vero minus si minores. Cõversa hinc etiam patet. Euclides ita demonstrat. Primo si anguli tres sunt æquales, duo: protinus intelliguntur majores



esse reliquo. Sin anguli sint inæquales, sit angulus *aei* major angulo *aeo*, & æqualis amputetur *aeu*, & æquetur *eu* ipsi *eo*. Iam per 2 e 7 duo triangula *aeu* & *aeo* æquantur basibus *au* & *ao*. Item *ao* & *oi* majora quam *ai* & *ao*, æquatur ipsi *au*. Ergo *oi* majus est ipso *iu*: Hic duo triangula *uei* & *ieo* duobus cruribus æqua, & basis *oi* major basi *iu*: Ergo per 4 e 7 angulus *oei* major est angulo *ieu*. Ergo duo *aeo* & *oei* sunt majores quam ipse *aei*.

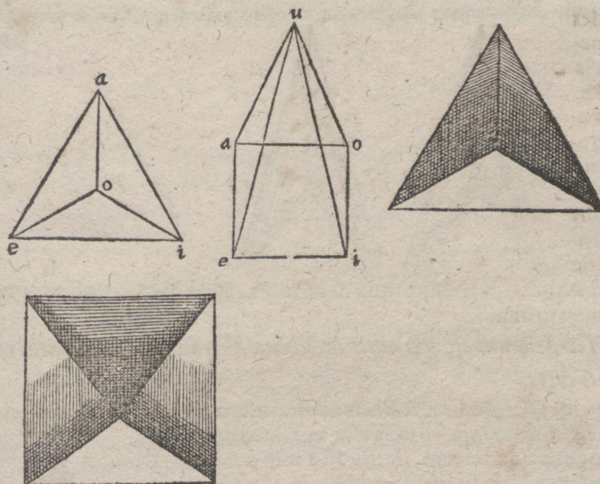
10. *Solidum planum est pyramis aut pyramidatum.*

Vocabulis novis in re minime nova utimur, sed tamen nondum generaliter nominata. Dichotomiæ tales præcesserunt de linea lineato, triangulo triangulato: & veritas rerum in hæc genera apte concluditur.

11. *Pyramis est solidum planum á basi rectilinea æqualiter fastigiatum.*

Ut hic

Ut hic intelligis â triangula basi *aei* in verticem *o* erigi triangula *aoe, aoi, eoi*: in pyramide *aeiou* vides â basi quadrangula *aeio* in verticem *u* triangula similiter erigi.



Itaque

1. *Pyramdis hedræ sunt una plures angulis in basi.*

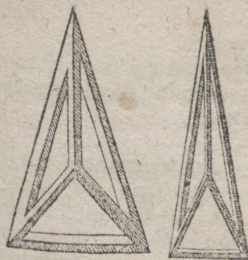
Et

2. *Pyramis est prima figura solidarum.*

Est enim pyramis in solidis, ut triangulum in planis. Resolvi enim pyramis potest in solidas figuras alias, sed in nullam simpliciorem potest, & paucioribus hedris constantem.

Itaque

3. *Pyramides æquealtæ sunt ut bases.* 5 e & 6 p 12.

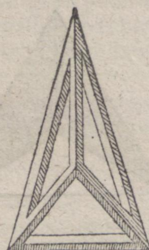


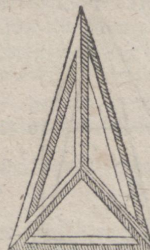
Et

4. *Reciprocæ basi & altitudine sunt æquales.* 9 p 12.

Consectaria hæc sunt é 12 & 13 e 4. Atque hic Euclides ut in prismatis nominavit basim & altitudinem pro cruribus æqualis anguli, ut in exemplis. Duæ

pyramides sunt æquealtæ basis triangulæ prioris duplæ ad posteriorem. Itaque prima est dupla secundæ. Item de

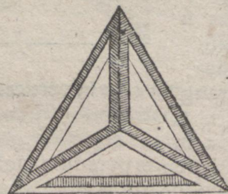




exemplo sequenti, ut basis primæ sit ad basim secundæ, sic altitudo secundæ ad altitudinem primæ.

12. *Tetraedrum est pyramis ordinata a' quatuor triangulis comprehensa.26 d 11.*

Ut hic vides. In planis rectilineis admonuimus in unoquoque genere unicã speciem esse ordinatam è triangulis æquilaterum, è quadrangulis quadratum, sic modo è toto pyramidum genere unicam speciem ordinatam esse tetraedram: neque tamen omnem, sed quæ comprehenditur á triangulis non solum ordinatis quidem sigillatim, sed æqualibus inter se similibusque. Possunt enim corpora comprehendi ab ordinatis hedris, quæ tamen non sint ordinata, quia hedræ illæ possunt ordinatæ separatim esse, sed neque æquales inter se, neque similes, neque ideo ordinatum corpus comprehendent: qualia sunt Archimedis tredecim corpora apud Pappum 5 lib. Tetraedrum autem generali nomine species ista dicitur propter excellentiam, quomodo etiam pyramis appellatur. Itaque



1. *Tetraedri latera sunt sex, anguli plani duodecim, solidi quatuor.*

Nam tetraedrum comprehenditur à quatuor triangulis ternorum laterum atque angulorum: unumquodque autem latus bis assumitur, ideoque numerus est dimidio minor. Hæc sunt in scholis ad finem 15 l. Et

2. *Tetraedra duodecim complent solidum locum.*

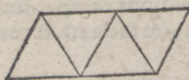
Quia octo solidi anguli recti complentes locum & duodecim anguli tetraedri æquantur inter se, cum utrique 24 rectis planis comprehendantur. Rectus enim solidus comprehenditur á tribus planis rectis, ideoque 8 comprehenduntur á 24. Item angulus tetraedri comprehenditur á tribus planis æquilateris, id est á sex tertiis unius recti: ideoque á duobus rectis. Itaque 12 comprehendũtur à 24. Sic Potamon geometra (ut est apud Simplicium 8 cap. 3 lib. de cælo) demonstraverat ex angulis compleri locum solidum á 12 pyramidibus. Et

3. Si quæ

3. *Si quatuor triangula ordinata & æqualia solidis angulis componantur, comprehendent tetraedrum.*]

Hæc fabrica promptior est, uti potes in subjectis

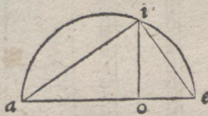


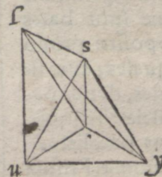


exemplis intelligere. Hæc enim triangula sic explicata copulato & connectito inter se, facies tetraedrum.

13. *Si recta potens sesquialterum ad latus trianguli æquilateri secetur dupla ratione, duplum segmentum perpendiculare trianguli centro, connexum cum ejus angulis comprehendet tetraedrum.* 13 p 13.

Comprehendi solidum à rectis intellige per plana rectis comprehensa, ut deinceps. Ut hic esto primum recta *ae* potens sesquialterum ad *ai* latus trianguli æquilateri, ut antea patuit 6 e 12, & secetur dupla ratione in *o* per 1 c 13 e 5, duplumque segmentum *ao* sit perpendiculare æquilatero triangulo *uys* ad centrum *r* per 7 e 21, sitque *rl* connexum cum





angulis per *lu*, *ls*, *ly*: Dico triangula *uys*, *usl*, *ysl*, *uyl* æquilatera & æqualia esse quia latera omnia sunt æqualia: Humilia tria primo æquantur ex thesi, sublimia tria per 5 e 12 & è sublimibus quodlibet humili: Nam si triangulo circulus circumscriptus intelligatur, latus poterit triplum radii *ur* per 7 e 18: At sublime potest item triplum, ut patet in prima figura de radio *oi*, qui est pro radio secundæ figuræ *ur*: ut enim *ao* ad *oi*, sic per 1 c 4 e 8 *oi* ad *oe*, & per 1 c 15 e 4, ut prima recta *ao* est ad tertiam *oe*, sic quadratum *ao* ad quadratum *oi*, & componendo *ao* cum *oe*, ut *ae* ad *oe*, sic quadrata *ao* & *oi*, id est per 5 e 12, quadratum *ai* ad quadratum *oi*, at *ae* est tripla ipsius *oe*: Ergo quadratum *ai* est triplum quadrati *oi*. Quare latus sublime æquale ipsi *ai* potest triplum radii, lateraque ideo omnia æqualia, proindeque & ipsa triangula.

de prismate.

Pyramidatum est solidum planum á pyramidibus comprehensum.

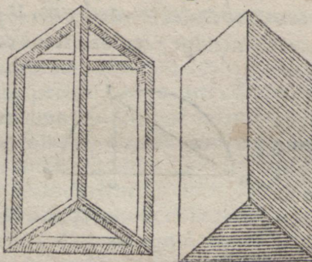
Pyramidatum sic é pyramidibus componitur, ut é triangulis triangulatum, & pyramis prima figura sic antea facta est, & compositio postea per species apparebit.

2. *Pyramidatum est prisma aut polyedrum mistum.*

Partitio pyramidati deinde fuit difficilior in materia rerum nondum satis animaduersatum vel explicatatum: dichotomia tamen hic adhibita est, quæ nobis optima adhuc occurrit.

3. *Prisma est pyramidatum, cujus duo opposita plana sunt æqualia, similia, parallela: reliqua parallelogramma.* 13 d II.

Ut hic vides. Pyramidis unica basis fuit, prismatis duæ sunt bases oppositæ primo æquales, tum similes, dende parallelæ: reliquæ sunt parallelogrammæ. Prisma est Campano corpus serratile, secuto nempe quandam originem nominis: πρίω enim, id est seco, distringo, & πρισμὸς est coarctatio, compresio. Itaque



Hedræ prismatis sunt binario plures angulis in basi.

Ut vero pyramidis á quaternario, sic prismatis á quinario in infinitum accretio est, ut sit á basi triangula, quadrangula, quinquangula, pentaedrum, hexaedrum, heptaedrum, & sic in infinitum. Prisma autem in Euclide interdum specialiter intelligitur de pentaedro, ut ad 40 p 11, ad 3. 4 p 12, ut rectangulũ in planis pro oblongo, & pyramis in solidis pro tetraedro ordinato.

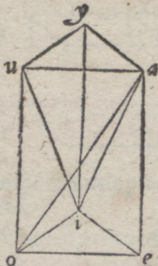
4. *Planus é basi & altitudine est soliditas recti prismatis.*

Geodæsia nempe parallelogrammi rectanguli est hic communis, cum altitudinis plana sunt rectangula parallelogramma, sed res per species intelligetur.

5. *Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine æqualis.* é 7 p 12.

Ut in exemplo prisma pentaedrum sectum est in tres pyramides æquales: Prima enim é planis *aei, aeo, aoi, eio* æquatur secundæ é planis *aoi, aou, aiu, auy* per 7 e 7, quia æquatur basi & altitudine communi. Itaque prima & secunda æquatur:

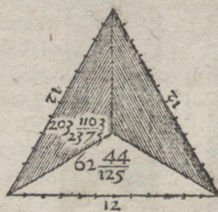
æquatur: Et secunda eadem æquatur sibi ipsi, dum basis sit *iou*, & vertex *a*, tumque æquatur tertiæ é



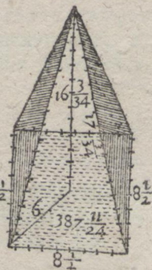
planis *aiu*, *aiy*, *uiy*, *auy*. Itaque tres æquantur. si basis triangulata sit, prisma solvatur in prismata basis triangulæ, theorema concludetur ut prius. Itaque

1. *Planus é sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine æqualis.*

Altitudo autem pyramidis habebitur, si quadratum é radio basis tollatur é quadrato lateris: Latus enim reliqui per 5 e 12 erit altitudo, ut in subjecto exemplo. Hic area trianguli $62\frac{44}{125}$ est basis pyramidis: Altitudo est $9\frac{15}{19}$, quia per 4 e 18, latus potest triplum radii: At si de 144

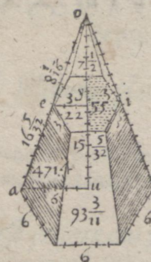


quadrato 12 lateris tollatur subtriplum, id est 48, reliquum 96 per 5 e 12 erit altitudinis quadratum, quadratique latus erit $9\frac{15}{19}$. Tertia autem pars $3\frac{5}{19}$, ex qua & basi planus erit $203\frac{1103}{2375}$ Sic in exemplo sequête quadratũ 36 radii 6 tollatur á quadrato $292\frac{9}{1156}$ lateris $17\frac{3}{34}$, reliqui $256\frac{9}{1156}$ latus erit $16\frac{3}{34}$, pro altitudine,



cujus tertia $5\frac{37}{102}$, & basi $72\frac{1}{4}$ erit $387\frac{11}{24}$. Si pyramis sit curta, metire totam, & partem quæ deest, tum á tota detrahe quod defuerat: ut hic. Sit *ao* latus totius $16\frac{5}{32}$, *eo* latus particularis $8\frac{1}{15}$, erit igitur perpendicularis totius *ou* $15\frac{5}{32}$: tertia pars $\frac{5}{96}$, ex qua & basi $93\frac{3}{11}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in minore pyra-

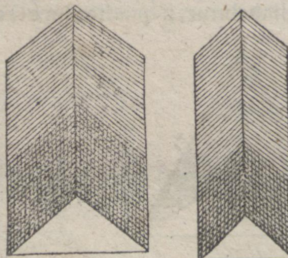
re pyramide à quadrato lateris $65\frac{1}{250}$ sublato quadrato radii 9: reliqui $56\frac{1}{256}$ latus fere $7\frac{1}{2}$ pro altitudine, cujus tertia pars fuit $2\frac{1}{2}$: basis fere 22, ex qua & tertia illa parte planus est 55 pro soliditate minoris pyramidis, qua deducta de majore reliquum 416 erit pro curta pyramide. Hoc modo curtum prisma metieris.



Et

2. *Prismata homogenea æquealta sunt ut bases.* 29.30.31.32 p 11.

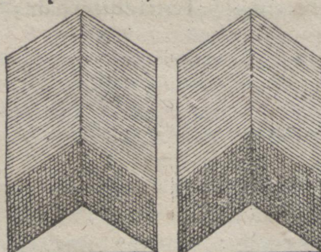
Cum nempe sint æquemultiplicia pyramidum. Homogenea autem requirũtur, quia pentaedrum cũ hexaedro non ita conveniret. Consectarium est é 12 e 4.



Et

3. *Si reciprocantur basi & altitudine, sunt æqualia.* 34 p 11.

Cõsectarium é 13 e 4.

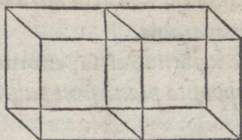


Et

4. *Si prisma secatur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt ut bases.* 25 p 11.

Quia

Quia segmenta sunt prismata homogenea. Itaque cum sint æquealta, altitudine nempe secantis plani, erunt ut bases, & hic bases sumendæ sunt oppositæ altitudini.

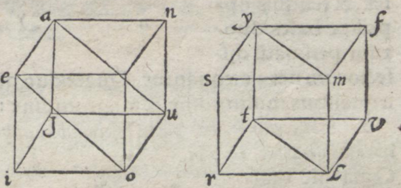


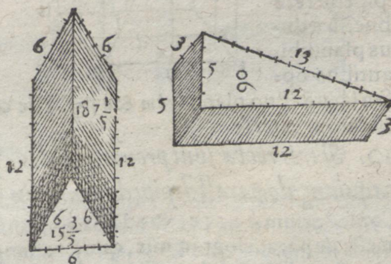
6. *Prisma est pentaedrum aut e' pentaedris compositum.*

Partitio ut antea qualis fieri potuit, & hic solutio compositionem ostendet.

7. *Si pentaedra alterum basis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulam duplæ sunt æquealta, sunt æqualia. 40 p II.*

Caussa est brevis, quia dimidia sunt ejusdem prismatis: Ut hic prismate per diagonios oppositorum laterum bisecto intelliges. Euclides ita demonstrat. Sunto pentaedra *aeiou* & *ysrlm* æquealta, primum basis triangulæ *eio*, secundum parallelogrammæ *sl* duplæ ad triangulā, utrumque vero duplicetur & absolvatur, ut primum sit *aeioun*, secundum *ysrlvf*. Jam ex thesi basis *sl* dupla est basis *eio*, cujus etiam dupla est basis *eo* per 4 c 6 *eio*. Itaque bases *sl* & *eo* æquantur, ideoque cum prismata ex thesi hic sint æquealta, ut bases ex conclusione æquales, prismata erunt æqualia, ideoque & ipsorum dimidia æqualia *aeiou* & *ysnlr*, quæ proposita fuerant. Prismatis vero pentaedri geodæsia jam dicta generaliter, res é duobus subjectis pentaedris intelligatur. Planus ex 18 perimetro basis triangulæ & 12 altitudine est 216, qui additus basi triangulæ $15\frac{18}{31}$, id est fere $\frac{3}{5}$ bis assumptæ, id est $31\frac{1}{5}$ componit $247\frac{1}{5}$ summam totius superficiei: At planus ex eadem basi $15\frac{3}{5}$ & altitudine 12 est $187\frac{1}{5}$ pro tota soliditate. sic in secundo prismate pentaedro, qui cuneus ex acumine dicitur, & qui proprie á secando prisma diceretur, superficies tota est 150, soliditas erit 90.





8. *Prisma e' pentaedris compositum est hexaedrum aut polyedrum, hexaedrum parallelepipedum aut trapezium.*

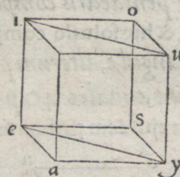
Partes suis nominibus intelliguntur: & partitio est superiorum similis.

9. *Parallelepipedum est cujus opposita plana sunt pallelogramma.* e' 24 p 11.

Itaque parallelepipedum in solidis respõdet parallelogrammo in planis. Hic enim hedræ oppositæ sunt parallelæ, illic opposita latera sunt parallela. Itaque

1. *Bisecatur plano per diagonios oppositorum laterum.* 28 p 11.

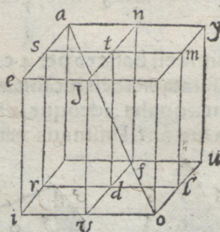
Respondet 34 p 1. Esto prisma é sex basibus *ai, yo, ye, ui, ri, au*, diagonii bisecant per 2 c 6 e 10 oppositas bases, & reliquæ oppositæ bases duorum prismatũ dissectorum per 3 e æquantur. Quare duo prismata comprehenduntur à basibus æqualibus multitudine & magnitudine: Itaque æqualia.



Et

2. *Si bisecatur duobus planis bisecantibus opposita latera communis bisectio & diagonius inter se bisecantur.* 39 p 11.

Quia hic diametri (qualis est illa bisectio) inter se bisecantur, ut in exemplo. Esto parallelepipedũ *aeiouy* bisectũ á duobus planis bisecantibus opposita latera: duo plana *srlm* & *ujvf*. Hic communis sectio *tsl* & diagonius *ao* bisecantur inter se.



10. *Si tres rectæ sunt proportionales, parallelepipedum mediæ æquatur æquiangulo parallelepipedo omnium.* e' 36 p 11.

Consectarium è 3 c 5 e, quod nos admonuit antea in planis generaliter verum esse de parallelogrammis, quod rectangulis duntaxat erat attributum.

11. *Parallelepipeda rectangula octo complent locum solidum.*

Id respondet in planis parallelogrammo rectangulo, utque illic anguli plani recti quatuor complent locum planum, ita hic octo solidi anguli complent locum so-

cum solidum, neque magis hic proprium cubo quam fuit antea quadrato: unde Aristotelis geometria illa emendatur.

12. *Figuratus parallelepipedi rectanguli appellatur solidus, factus á tribus numeris.* 17 d 7.

Ut si multiplices 1.2.3. facies 6 solidum: item si multiplices 2. 3. 4. facies 24 solidum, & latera solidi 6, erunt 1.2.3: solidi 24, erunt 2.3.4. Sic in planis planus absolute appellatur, ut hic solidus. *Itaque*

2. *Si duo solidi sunt similes, habent proportionalia latera & duos medios proportionales.* 21 d 7. 19. 21 p 8.

Consectarium est é 5 e 22. fiunt autem medii proportionales é lateribus similium, secundo, tertio, quarto: Item tertio, quarto, quinto. Ut hic vides.

2. 3. 5. 4. 6. 10.
30. 60. 120. 240.

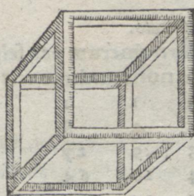
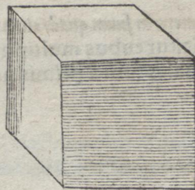
P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXIIII. de cubo.

P*Arallelepipedum rectangulum est cubus aut oblongum.*

Partitio respondet in planis partitioni parallelogrammi rectanguli in quadratum & oblongum, quin tota hæc differentia communis est planorum & solidorum, tantumque quadrati & cubi nomina distincta sunt. Nam in planis æque & solidis dicuntur oblongum, rhombus, rhomboides, trapezium.

2. *Cubus est rectangulum isoedrum.* 25 d 11.

Ut hic. Definitio respondet quadrati definitioni: utraque enim figura est rectangula & rectitermina: sed termini in quadrato latera dicũtur, in cubo dicuntur hedræ, quæ tamen laterib. etiã definiuntur. Ergo ut differẽtiæ corporũ generales á generalib. superficierũ differentiis plano obliquo: sic modo speciales á specialibus assumuntur. Corpus planum quod comprehenditur á planis superficiebus. Corpus cubicum quod á quadratis comprehenditur, sed nomen generi defuit, quo proprie corpus planum diceretur, speciei huic proprium nomen factum est cubus. De cubo mysterium est quoddam apud Vitruvium in proœmio lib. quinti, quod illic perlegito. *Itaque*

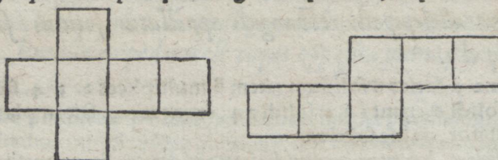



2. *Cubi latera sunt duodecim, anguli plani vigintiquatuor, solidi octo.*

Ho: item est é scholio ad finem 15 lib. Itaque

2. *Si sex quadrata æqualia solidis angulis componantur, comprehendent cubum.*

Ut hic in duobus exẽplis.



3. *Si é quadrati angulis perpendiculares lateribus æquales sublime connectantur, comprehendent cubum.* é 15 p 11.

Consectarium est é proximo superiore consectario, sex enim quadrata tum connectentur.

3. *Diagonius cubi potest triplum lateris.*

Nam diagonius quadrati potest duplum lateris per 3 c 5 e 12, & diagonius cubi potest & latus & diagonium quadrati per idem: potest itaque triplum lateris.

4. *Si quatuor rectarum continue proportionalium prima sit dimidia quartæ cubus, primæ erit dimidius ad cubum secundæ.* é 33 p 11.

Consectarium est é 15 c 1 e 4, unde problematis deliaci est solutio ab Hippocrate primum deprehensa, ut in procemio plenius actum est. At duarum mediarum mesographus ab Herone fuit. 8 e 13.

5. *Solidus cubi etiam cubus dicitur, solidus nempe æqualium laterum.* 19 d 7

Itaque

Fit á numero in suum quadratum multiplicato.

Sic efficitur cubus multiplicando numerum per seipsum & factum per primum: quales sunt á primis novem notis arithmeticis primi novem cubi.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Hæc generalis est inventio cubi & geometrica & arithmetica, specialis inventio varia est in Euclide é cõtinue proportiõalibus numeris & é cubis ipsis, unde repetito, si quidem fructum tantæ subtilitatis agnoveris. Analysis quadrati

lateris

lateris proprium Theorema in Euclide habuit: analysis cubi non habuit: analogiam tamen hic sequi licet, & alteram geometricæ analyseos utilitatem proferre: propositio per analogiam sic erit.

6. *Si recta secetur in duo segmenta, cubus totius æquabitur cubis segmentorum & duplici solido ter comprehenso á quadrato sui segmenti & reliquo segmento.*

Ut latus 12 secetur in 10 & 2 cubus 1728 ex toto 12 æquabitur duobus cubis 1000, & 8, é segmentis 10 & 2, & duplici solido, quorum primus 600 ter comprehenditur á 100 sui segmēti quadrato & á 2 reliquo segmento, secundus 120 ter item comprehenditur á 4 sui segmenti quadrato & á 10 segmento. sed rem totam genesis totius cubi facilius declarabit, quomodo nempe extremi & inter medii solidi generentur. fiat igitur cubus é tribus æqualibus lateribus 12, 12, 12, atque in primis secundum latus primo multiplicetur sic.

```
  1 2
  1 2
  ---
  2 4
1 2
```

Productas notas ne addito, sed singulas per reliquum latus multiplicato, & multiplicatas addito separatim sic.

```
      2 4
    1 2
      1 2
    -------
      4 8
    2 4
    2 4
 1 2
 --------------
 1, 6, 12, 8
```

Itaque

Latus primi cubi singularis est alterum latus secundi solidi, ejusdemque lateris quadratus est alterum latus primi solidi, cujus reliquum latus est latus secundi cubi, ejusdemque reliqui lateris quadratus est reliquum latus secundi solidi.

In ista igitur æquatione quatuor solidorum cum uno solido considerabis peculiarem genesim & compositionem, primum ut cubus ultimus fiat ex ultimo segmento 2, tum ut secundus solidus á 4 quadrato sui segmenti & 10, & reliquo segmento ter comprehendatur: Denique ut primus solidus á 100 quadrato sui segmenti 10, & reliquo segmento 2, ter item comprehendatur: postremo ut cubus 1000 fiat é majore segmento 10. Ex hac igitur genesi analysis contraria deducitur é mutua cuborum cum solidis colligatione, qualis in quadratis

dicta eſt. Hic enim tametſi de ſolido agitur, attamen duo latera ſpectantur, quia alterum compoſitum & planum eſt. primi igitur cubi 1000 latus 10, eſt clavis ad duos ſolidos, & cubum ſequentes aperiendum. Eſt enim alterum latus ſecundi ſolidi, quippe comprehenſi ter ab eo & ſecundi ſegmenti quadrato. Eſt etiam ejuſdem lateris 10 quadratus 100, latus alterum primi ſolidi 600, comprehenſi nempe ter ab hoc quadrato 100, & reliquo ſegmento 2: eſt etiam reliquum primi ſolidi latus 2 latus ſequentis cubi: ac poſtremo ejuſdem lateris 2 quad ratus reliquum latus ſecundi ſolidi. Hoc igitur velut Ariadnes filo tam varii laterum errores explicantur, ut in quadratis fuit. Nam cum latera ſingularium cuborum inveneris, latus etiam cubi totius inveneris: tametſi enim cubus univerſus eſt major cubis partium: attamen latus univerſum eſt æquale lateribus ſingularium cuborum, & ſolidis intermediis duntaxat utimur ad cubi ſequentis latus inveniendum. Quæratur igitur latus cubi 1728. Primum notabis punctis ultimum & millenarium, deinde quemcunque locum, ſic 1̣728̣: Deinde cubi maximi in primum pūctum definientis inveni latus cubicum, hic erit 1: ſeorſum nota 1, & lateris cubum tolle de numero deſniente in idem punctum, nihil manebit, ſic 1̣728 (1: Hoc primum ſingularis cubi latus eſt. Secundo latus idem triplicetur, fient 3, primum latus ſecundi ſolidi. Hic numerus triplus dicitur, ſubjiciturque eidem ſolido ſic.

1̶̣72 8̣ (1
    3

Item latus quadretur, erit 1, & cum quadratum fuerit triplicetur, erit 3 primū latus primi ſolidi, & diviſor dicitur, eidemque ſolido ſubjicitur, ſed inferius, ut á triplo ſejungatur ſic.

1̶̣72 8̣ (1
    3
  3

Idem etiam diviſor habetur multiplicatione quoti per triplum, quia ſolidus idem eſt quocunque ordine tria ejus latera multiplicentur. Per inventum diviſorem divide primum ſolidum, emergit 2 reliquum ejuſdem primi ſolidi latus. Atque latus hoc reliquum, quia ſequentis cubi latus eſt, cum ſuperioris cubi latere deinceps adnota, & per quotum 2 multiplica 3 diviſorem, facies 6 ſubjicienda diviſori. Poſtremo idem latus 2 quadretur, fiet 4 reliquum latus ſecundi ſolidi: 4 igitur per 3 triplum multiplicatis fiunt 12, item ſubjicienda ſecundo ſolido.

ſolido. Denique 2 latus cubi cubatum facit 8 ſubjicienda ſequenti puncto: ad de tres ſummas, facies 728, quibus ſubductis nihil manebit, ſic.

```
1728 (12
 32
 4
 3
 6
 128
-----
 728
```

Quod ſi cubi ſingulares duobus plures fuerint, latera præcedentia pro unico ſumuntur: ut ſi quæratur latus cubi 34012224, notabis locis cubicis, latus primi cubi erue, ſic.

```
 7
34012224 (3
```

Denique ſecundi ſingulatis ſic eruatur.

```
 1
 7244
34012224 (32
   94
 474
 54
  368
-----
 5768
```

Hic igitur cum duo latera ſint tanquam unicum triplicandum & triplum ſubjiciendum ſecundo ſolido: eadem duo latera velut unicum quadretur, quadratumque triplicetur, fient 3072 primo ſolido pro diviſore ſubjiciẽda: per hunc diviſorem divide primum ſolidum, quotus erit 4, per quem multiplicato diviſorem 3072, facies 12288. Poſtremo quadra 4 quotum, fient 16: iis multiplica triplum 96, fient 1536 ſubjicienda triplo. Tandem etiam quotum cubatum

id eſt

id est 64 subjice puncto sequenti, & tres summas addito, & subducito, nihil manebit, sic.

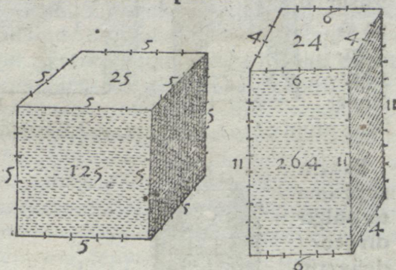
```
  2244
3402224
    864
    26

  3072
 ------
 22288
   2536
      64
---------
 2244224
```

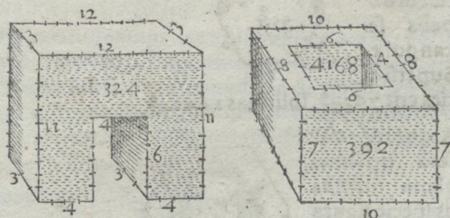
Aliquando post cubicum latus jam repertum, locis proximis neque solidus est ullus, neque cubus. Itaque tum lateri invento, circulus adscribendus est, ut in cubo 8120601(201. Si secundum latus primi solidi sit majus latere sequentis cubi, solidus divisus partem secundi solidi complectebatur, ideoque minuendum latus illud est, ut in cubo 17576, primum latus erit 2, secundum, si feceris 7, ut videtur initio fieri posse, facies primi solidi secundum latus majus latere sequentis cubi. Itaque latus illud minuatur, & pro 7 sume 6, latus legitimum produces, analysis tota erit 17576(26. Hæc via generalis est & communis ad quamlibet magnum cubi latus retexendũ. Sic in cubo 312908547069 latus invenietur 6789. In partibus est quoque cubi ratio. Nam si propositus numerus cubus nõ est, nullũ est ejus in numeris verum latus, cubi tamen in eo maximi verum latus erui potest: ut in 17616 cubus continetur 17567, & latus ejus est 26, & supersunt 40. Latus itaque numeri non cubi nullum tam accuratum reperietur unquam, quin accuratius inveniri possit: ut de quadrato jam dictum est, duoque item hic modi sunt cubicum latus vero propinquum inquirendi, quales etiam in quadrato ante declarati sunt. Primus modus subducit duos solidos & ultimum cubũ in proximo majore cubo comprehensos, quo intelligatur duorum continuorum cuborum distantia, sicut antea duorum quadratorum distantia intellecta est. Huc enim cubicus gnomo quidã recurrit, quem cõcipis é tribus planis cubi, uti gnomonẽ quadrati é duobus quadrati lateribus. Sic in exemplo 17616, ubi latus est 26, & supersunt 40, sequẽtis cubi. Divides 27 in 26 & 1, & ut antea didicisti solidos hinc & cubũ facies, primus solidus comprehendetur ter á 676 quadrato segmenti 26 & 1 reliquo segmento. Itaque erit 2028: secundus comprehenditur ter á quadrato 1, & reliquo segmento 26, & erit 78. Cubus autem 1 est 1: adde igitur illos duos solidos, & hunc cubum, habebis 2107 pro nomine reliqui 40. Itaque latus 17616 est $26\frac{40}{2107}$, quo intelligitur, ut antea in quadrato, quantum numerus 40 abest á nomine 2107, tantum cubum propositum abesse á proximo majore. Itaque si numeratorem 40 tollas á nominatore 2107, & reliquum 2067 ad-

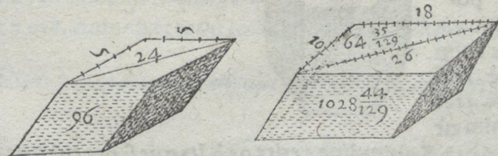
das 17616,

das 17616, totus erit 19683, cubus lateris 27. Secundus modus est per partes magni cujusdam nominis sed cubicas, ut earum latus jam certum sit, ut numerus idem 17616 reductis ad centesimas cubicas, id est ad $\frac{}{1000000}$ facit 17616000000, cujus numeri latus est 2601 pro numero datarũ cẽtesimarũ, sic $\frac{2601}{100}$, id est $26\frac{1}{100}$ & supersunt 19712199, quæ ne centesimam quidem invento lateri possunt addere, quia differentia cubi proximæ majoris major est, ideoq; reliqua illa despiciuntur. Atque hæc de cubo: de reliquis autem parallelepipedis, oblongo, rhombo, rhomboide, deque trapezio & polyedris, pentaedris stereometra præcipua nulla est. Prismatis geodæsia est exposita prius, exemplis tantum specialibus opus est, ut hic. Planus é basis perimetro 20 & altitudine 5 est 100. Additis utrique basi 25 & 25, id est 50, totus est 150 pro tota superficie. Planus vero é basi 25, & altitudine 5, est 125 pro tota soliditate: sic in oblongo, planus é basis perimetro 20, & altitudine 11 est 220, qui additus basibus 24 & 24, id est 48 componit 268, pro tota superficie. At planus é basi 24 & altitudine 11 est 264 pro solidita te. Atque eadem geodæsia erit in



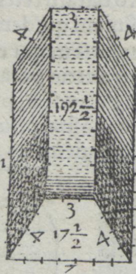
dimetiendis parietibus rectangulis vel portis aliqua fenestra, aut cavitate vacuis, si vacua ipsa detrahantur, ut hic vides. In proximo exemplo spissitudo est 3 pedum, latitudo 12, altitudo 11: tota itaque soliditas est 396. ac porta est spissitudinis 3 pedum, latitudinis 4, altitudinis 6, soliditasque portæ 72 pedũ, quibus subductis á toto pariete restant 324 pro reliquo parietis corpore. In secundo exemplo longitudo pedum 10, latitudo 8, altitudo 7, faciunt totius corporis 560 pedes: Cavitas lõgitudinis 6, latitudinis 4, altitudinis 7 facit 168, quibus subductis de 560, reliqui summa est 392. Sic amplissimi ædificii parallelepipedos parietes, murosque omnes metiri liceat. Ea-

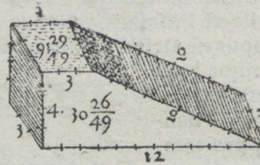




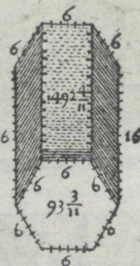
dem geodæsia est in rhombo, rhomboide, trapezio, & quolibet multangulo: basis metienda est ut prius, tum ex ea & altitudine soliditas constabit: ut in rhombo basis 24 altitudinis 4 soliditas est 96, in rhomboide basis $64\frac{35}{129}$, altitudinis 11, soliditas $1028\frac{44}{129}$.

Eadē geodæsia denique trapezii: ut in exemplis. Superficies primi est 198, soliditas $192\frac{1}{2}$. Superficies secundi est $148\frac{3}{49}$, soliditas $91\frac{29}{49}$.

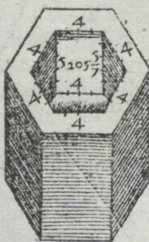




Eadem & prismatis polyedri geodesia erit: ut hic vides in octaedro basis sexangulæ. Superficies erit $762\frac{6}{11}$, soliditas $1492\frac{4}{11}$.



Atque hinc vasorū qualibet plana soliditatis specie figuratorū capacitas æstimari potest: ut hic vides. Hic enim planus ē basi sexangula $41\frac{1}{7}$: radius enim est latus per 6 e 18, & altitudine 5 erit $205\frac{5}{7}$. Itaque si pes cubicus contineat 4 quartas ut Parisienses loquuntur, vas continebit quartas $822\frac{6}{7}$, id est fere 823.



de polyedris miſtis ordinatis.

Polyedrum miſtum ordinatum eſt pyramidatum compoſitum é pyramidibus vertice coeuntibus in centro, & ſola baſi eminentibus.

Pyramidati primum genus in priſmate ita fuit: dicatur polyedrum miſtum ordinatum ſeparatim á pyramide & priſmate: quia neutrius definitio ei convenit. Pyramis ab una baſi faſtigiatur, miſtum non item. Priſmatis oppoſita plana ſunt æqualia, ſimilia, parallela, hoc convenit. At reliqua plana priſmatis ſunt parallelogramma, quod neque octaedro, neque icoſaedro, neque dodecaedro convenire poteſt, cum plana octaedri & icoſaedri ſint triangula, dodecaedri ſint quinquangula. Quare neque pyramis neque priſma hic dici poteſt, pyramidatum tamē eſt é pyramidibus vertice (ut é geodæſia mox intelligetur) coeuntibus in centro, & ſola baſi eminentibus, neque tamen propterea dixeris talibus pyramidibus inordinatis compleri locum, neque enim omnimodo ſumptæ compleant locum. Atqui é polyedris miſtis ordinatis Euclides tria duntaxat hæc ordinata ſibi propoſuit, quæ & nobis ſunt propoſita. Cū igitur pyramidatum miſtum ordinatum ita componatur é pyramidibus, geodæſia ipſius erit é geodæſia pyramidum componentium: baſiſque una per numerum omnium baſium faciet corporis ſuperficiem, & pyramis una per numerum omnium pyramidum multiplicata faciet ſoliditatem.

2. *Altitudo componentis pyramidis habetur per radium circuli baſi circumſcripti, perque polyedri ſemidiagonium.*

Baſis pyramidis patet oculis, altitudo intus latet, invenitur autem per triangulum rectangulum, cujus baſis eſt ſemidiagonius, crura radius circuli & perpendicularis altitudinis. Itaque ſublato radii quadrato de quadrato ſemidiagonii, latus reliqui per 5 e 12 erit altitudo: ſed radius circuli ſpecialem inventionem per ſpecies baſis triangulæ primum, deinde quinquangulæ habebit.

3. *Miſtum ordinatum eſt triangulæ baſis aut quinquangulæ.*

Partitio eſt é ſubjectis baſibus.

4. *Si quadratus é latere triangulæ baſis trifariam dividatur, latus trientis erit radius circuli baſi circumſcripti.*

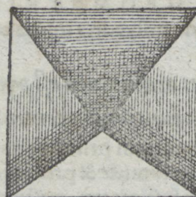
Ut patet per 7 e 18. Atque hæc radii circularis inventio eſt pro octaedro & icoſaedro.

5. *Miſtum ordinatum triangulæ baſis eſt octaedrum aut icoſaedrum.*

6. *Octaedrum eſt polyedrum miſtum ordinatum, quod ab octo triangulis comprehenditur. 27 d 11.*

Ut hic vides monogrammum & solidū.





Itaque

1. *Octaedri latera sunt 12, anguli plani 24, solidi 6.*

Hoc item est de scholio adfinem 15 lib.

Et

2. *Octaedra novem complent locum solidum.*

Quadruplex enim angulus tetraedri æquatur triplici octaedri, & dodecuplex ideo nuncuplici. Itaq; novem anguli octaedri valent octo solidos rectos. Est ita Potamonis demonstratio ex angulis consentanea Euclidis demonstrationi, item ex angulis quod quinque tantum solida sint ordinata demonstranti octaedrū solidi loci completivum efficiet contra Aristotelē: utque in planis, sic in solidis triplex figura complebit locum.

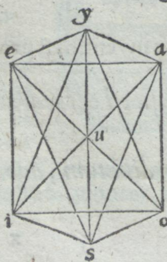
3. *Si triangula octo æquilatera & æqualia solidis angulis componantur, comprehendent octaedrum.*

Hæc vero fabrica facilis est, ut patet in subjecto exēplo: ubi uides tā quam duplicis pentaedri duo triangula æquilatera æqualia intersecari.



7. *Si recta centro quadrati utrinque perpendiculrais æqualis semidiagonio connectatur cum angulis, comprehendet octaedrum.* 14 p 13.

Nam perpendicularis *yu* & *su* cum semidiagoniis *ua*, *uo*, *ui*, *ue*, æquabit per 2. e 7 octo late



ra yd, ye

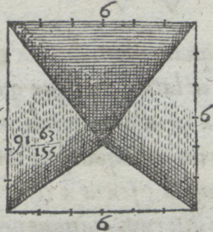
raya, ye, yo, yi, se, si, sa, so: octoque triangula. Itaque

1. *Diagonius octaedri potest duplum lateris*

Ut patet per 5 e 12. Et

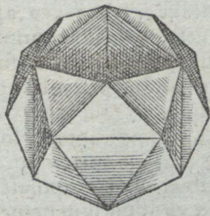
2. *Si quadratum de latere octaedri duplicetur, duplicati latus erit diagonius.*

Ut in subjecto exemplo latus est 6 quadratum 36, duplicatum 72, cujus latus $8\frac{8}{17}$ est diagonius. Atque hinc existet geodæsia octaedri. Semidiagonius enim est $4\frac{4}{17}$: cujus quadratum est $17\frac{271}{289}$; & quadratum de 6 latere trianguli æquilateri potente per 4 e 18-triplũ radii est 36, éque 12 triente latus $3\frac{3}{7}$ est radius circumscripti circuli. Quare sublato quadrato 12 de quadrato $8\frac{8}{17}$ restabunt $5\frac{271}{289}$ quadratum perpendicularis cujus latus $2\frac{1}{5}$ est ipsa altitudo perpendicularis, cujus pars tertia est $\frac{11}{15}$ quæ per $15\frac{18}{31}$ basim triangulam faciant $11\frac{66}{155}$ pro octava pyramide, quæ multiplicata per 8 facit $91\frac{63}{155}$ pro toto octaedro.



8. *Icosaedrum est polyedrum mistum ordinatum á viginti triangulis comprehensum. 29 d 11.*





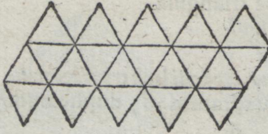
Itaque

1. *Icosaedri latera sunt 30, anguli plani 60, solidi 12.*

Consectarium est item é scholio ad finem 15 lib. Et

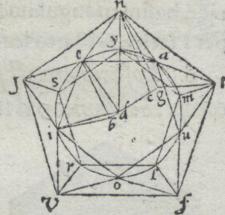
2. *Si viginti triangula ordinata & æqualia solidis angulis componantur, comprehendent icosaedrum.*

Fabrica autem hæc prompta est, ut è subjecto exemplo perspicitur.



9. *Si ordinata quinquangulum duplex & decangulum unum eidem circulo sic inscribantur, ut latus utriusque quinquanguli subtendat duo latera decanguli, sex rectæ circulo perpendiculares & radio ejus æquales, quinque ab angulis alterius quinquanguli connexæ & inter se, & cum angulis reliqui quinquanguli, sexta à centro utrinque continuata latere decanguli, & connexa illic cum quinque perpendicularibus, hic cum angulis secundi quinquanguli comprehendent icosaedrum.* é 15 p 13.

Fient enim viginti triangula æquilatera & æqualia. Esto igitur quinquangulum duplum primũ *aeiou*, secundum *ysrlm*, quorũ latus quodlibet subtendat duo latera decanguli, nẽpe *utym*, subtendat *ya* & *am*, tum sunto perpendiculares quinque ab angulis secundi quinquanguli *yu*, *sȷ*, *rv*, *lf*, *mt*. & connectãtur primo inter se per connectentes *nȷ*, *ȷv*, *vf*, *ft*, *tn*. secundo cum angulis primi quinquanguli per connectentes *ne*, *eȷ*, *ȷi*, *iv*, *vo*, *of*, *fu*, *ut*, *ta*, *an*. Sexta à centro *d* sit *bg* radius *dc* continuatus utrinque latere decanguli *cg* & *db* connexa supra cum perpendicularibus, ut per connectentes *ng*, *tg*, infra cum angulis primi quinquanguli, ut per connectentes *be*, *bi*, & cæteri locis similiter, omnesque planis compleantur. Hoc dico icosaedrum esse, & à viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehẽdi. Primo intermedia decem triangula perpendicularibus omissis æquilatera esse & æqualia unum demonstrabit, ut *nat*. Nam *mt* & *yu* (quia sunt perpendiculares) sunt etiam per 6 e 21 parallelæ, & ex thesi sunt æquales. Itaque per 6 c 12 e 5 *nt* æquatur ipsi *ym* lateri quinquanguli: item *na* per 5 e 12 potest crura *ny* & *ya*, id est per fabricam latera sexanguli & decanguli, & per conversam 9 e 18 est latus quinquanguli: Idem erit de *at*. Quare *nat* est æquilaterum: idemque de reliquis novem intermediis *nae*, *neȷ*, *eȷi*, *ȷiv*, *ivo*, *vof*, *fou*, *fut*, *uta*, *tan*. Similiter & de quinque superis triangulis probabitur ductis rectis *dy* & *cn*, quæ ut prius (quia connectunt æquales parallelas ipsas *dc* & *yn*) erunt æquales. At *dy* est latus sexanguli. Itaque *cn* latus idem erit sexanguli, & *cg* est latus decanguli. Itaque *gn* potens utrumque per 5 e 12 erit per conversam 9 e 18 latus quinquanguli, & similiter *gt* concludetur latus quinquanguli. Quare *ngt* est æquilaterum, & quatuor reliqua similiter erunt æquilatera. Reliqua quinque infra triangula simili



modo

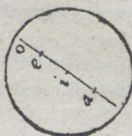
modo concludentur: unum igitur esto pro omnibus *ibe* ductis radiis *di* & *de*. Nam *ib* potens ut prius latera sexanguli & decanguli latus erit quinquanguli, erit, & pariter *be* potēs *de* & *db* latera sexāguli & decāguli, latus quinquanguli. Quare triangulum *ebi* est æquilaterum, & quatuor reliqua similiter ostendentur æquilatera. Omnia igitur latera viginti triangulorum cum sint æqualia, erunt triangula ipsa æquilatera, & per c 6 e 7 æqualia.

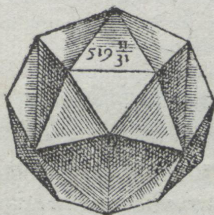
10. *Diagonius icosaedri est irrationalis ad latus.*

Quartum est exemplum ἀλογίας vel ἀσυμμετρίας: primum fuit de diagonio & latere quadrati, secundum fuit de segmentis rectæ proportionaliter sectæ, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli. Et

11. *Potest quintuplum circularis radii.*

Nam per 8 e 18 continuata è latere sexanguli & decanguli secatur proportionaliter, & majus segmentum est latus sexanguli: Ut hic bisecetur perpendicularis *ae* in puncto *i*, tum *eo*, id est minus segmētum continuatum dimidio majoris, id est *ie* poterit per 5 e 14 quintuplum ejusdem dimidii *ie*. Itaque cum *io* dimidium diagonii possit quintuplum bisegmenti, diagonius tota poterit quintuplum totius bisecti. Atqui hinc etiam erit geodæsia icosaedri. Nam ad altitudinem pyramidis semidiagonius est è latere decanguli & semiradio circuli: latus autem decanguli est recta subtendens dimidiam peripheriam lateris quinquangularis, vel majus segmentū radii proportionaliter secti. Sic enim geometrice sumi potest, & pro sua mensura numerari. Itaque si quadratum è latere decanguli tollatur á quadrato è latere quinquanguli, relinquetur per 9 e 18 quadratum è latere sexanguli, id est è radio. Latus decanguli quia latus quinquāguli hic est 6, erit $3\frac{3}{35}$ recta nempe subtendens dimidiam peripheriam: semiradius autem sic habebitur. Quadrata quinquanguli & decanguli sunt $369\frac{639}{1225}$: & subductione hujus ab illo reliquum quadratum sexanguli per 9 e 18 est $26\frac{586}{1225}$, & reliqui latus pro radio est 5 & fere $\frac{5}{7}$. semiradius igitur est $2\frac{6}{7}$: adde latus decanguli $3\frac{4}{35}$ cum $2\frac{6}{7}$, totum erit $5\frac{33}{35}$ pro semidiagonio icosaedri. Radius circuli triangulo circumscripti est per 7 e 18 idem qui prius $3\frac{3}{7}$ è quadrato nempe 12. Itaque si quadratum circularis radii tollatur á quadrato semidiagonii, relinquetur quadratum altitudinis & perpendicularis: quadratum semidiagonii est $35\frac{380}{1225}$ quadratum radii circularis est 12, hoc ab illo sublatum relinquit $23\frac{639}{1225}$, cujus latus est fere 5 pro perpendicula



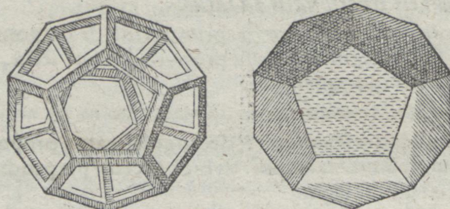


dicula

diculari & altitudine proposita: unde jam pyramis æstimetur. Basis pyramidis triangulæ est $15\frac{18}{31}$. Planus ex hac basi & tertia altitudinis est $25\frac{30}{31}$ quibus per 20 multiplicatis summa icosaedri est $519\frac{11}{31}$. Hæc geodæsia est icosaedri.

12. *Polyedrum mistum ordinatum quinquangulæ basis est quod á duodecim quinquangulis comprehenditur, & dodecaedrum dicitur.*

Ut hic

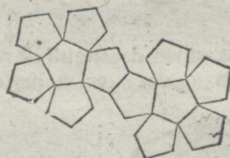


Itaque

1. *Dodecaedi latera sunt 30, anguli plani 60, solidi 20.*
Hoc item est ex eodem illo scholio 15 lib.

2. *Si duodecim quinquangula ordinata æqualia solidis angulis componantur, comprehendent dodecaedrum.*

Ut hic vides.



13. *Si cubi latera rectis bisecentur, ternaque bisegmenta bisecantium in conterminis planis neque concurrentium neque parallelarum, duo unius tertium reliquæ vicinum proportionaliter ita secentur, ut minora segmenta bisecantem terminent, ternæ extra cubum dictis planis perpendiculares á proportionalium sectionum punctis, æquales majoribus segmentis connexæ duæ ex eadem bisecante inter se & cum vicinis cubi angulis, tertia cum angulis eisdem comprehendent dodecaedrum.* 17 p 13.

Sunto cubi duo plana pro omnibus, ut unum quinquangulum pro duodecim describatur, eaque contermina *aeio* & *euyi* lateribus bisecta per bisecantes *sr*, *lm*, *rn*, *ſv*, triaque bisegmenta bisecantium *lm* & *rn* neque concurrentium neque parallelarum, duo ipsius *lm* nempe *fl* & *fm*, tertium reliquæ vicinum, id est *lr*, & quodlibet bisegmentum secetur proportionaliter in punctis *d*, *c*, *g*, ita ut minora segmenta terminent bisecantem nempe *dl*, *cm*, *gr*: denique sunto tres

perpend

perpendiculares á punctis *db*, *c*, *g*, ipsæ *d*, *cp*, *gz*, duæque primæ connexæ inter se per *bp*, & cum angulis cubi per *be* & *pi*, tertia connexa cum iisdem angulis per *ze*, *zi*, omnesque planis compleantur. Dico primum quinque latera *bp*, *pi*, *iz*, *ze*, *eb*, æqualia esse, quia singula sunt dupla ejusdem segmenti majoris. Ductis enim rectis *de* & *eg*, *ig* patebit de duobus, eodemque modo de reliquis. Primo igitur *cd* & *bp* æquantur per 6 e 21 & 6 e 12 e 5. Itaque *bp* est duplum majoris segmenti. Deinde tota *fl* secta proportionaliter & minus segmentum *dl* possunt per 6 e 14 triplum majoris *fd*, id est per fabricam *db*. Itaque *le* quæ est æqualis sectæ *lf* & *ld* possunt triplum ipsius *db*: at per 5 e 12 *de* potest *le* & *ld*. Itaque potest triplum ipsius *db*. Igitur utraque *ed* & *db* potest quadruplum ipsius *db* ad *be* per 5 e 12 potest ipsas *ed* & *db*, ideoque potest quadruplum ipsius *eb*, & per 7 e 12 est ipsius dupla. Itaque duo latera *eb* & *bp* æquantur, & eodem argumento æquantur *pi*, *iz*, *ze*. Quinquangulum igitur est æquilaterum. Dico quod est etiam planum, posset enim dici obliquum esse & in duobus planis situm. Esto igitur *fh* parallela ad ipsas *db* & *cp*, & ipsis æqualis, & ducatur recta *hz*, ipsa una erit per 10 e 7. Nam ut tota *tr*, id est *rf* est ad majus segmentum, id est ad *fh*, sic *fh*, id est *zg* est ad *gr*, & bina crura *fh*, *gr*, *fc*, *gz* per 6 e 21 sunt alterne parallela. Itaque bases sunt continuæ. Patuit adhuc quinquangulum æquilaterum & planum factum esse: reliquum est ut æquiangulum probetur. Ducantur rectæ *ep*, *ec*, dico angulos *pbe* & *ezi* æquari, quia crurum æqualium per fabricam bases *pe*, & *ei* habent æquales potentes nempe quadruplum ipsius *le*. Nam recta *lf* secta proportionaliter & aucta majore segmento *df*, id est *fc*, secatur iterum proportionaliter per c 3 e 14, & per 6 e 14 tota & minus segmentum, id est *cp* possunt triplum majoris *fl*, id est ipsius *le*. Itaque *el* & *lc*, id est *ec* & *cp*, id est *ep* potest quadruplũ ipsius *el*, & per 7 e 12 est dupla, & ipsa *ei* est item per fabricam dupla ejusdem. Itaque bases sunt æquales. Eodemque modo ductis *id* & *ib* concludetur tertius angulus *bpi* æqualis angulo *ezi*. Itaque per 12 e 14 quinque anguli sunt æquales.

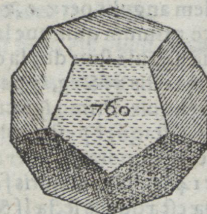
14. *Diagonius est irrationalis ad latus dodecaedri.*

Quintum est exemplum ἀλογίας & ἀσυμμετρίας: primum fuit de diagonio & latere quadrati, secundum de secta proportionaliter & ejus segmentis, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli inscripti, quartum de diagonio & latere icosaedri: quintum modo est de diagonio & latere dodecaedri.

15. *Si latus cubi secetur proportionaliter, majus segmentum erit latus dodecaedri.*

Id enim modo dictum est. Atqui hinc etiam est geodæsia dodecaedri. Nam si subtendens angulum quinquanguli quadrata triplicetur, triplicatæ dimidiatum latus erit semidiagonius dodecaedri, quia per 3 e 24 diagonius cubi, id est dodecaedri potest triplum lateris cubici. At si quadratum é latere decanguli tollatur de quadrato é latere quinquanguli, latus reliqui erit radius circuli

quinquãgulo circũscripti: Postremo si tollatur quadratũ radii á quadato semidiagonii, reliqui lat⁹ erit perpẽdicularis altitudo. Ut si lat⁹ decãguli sit $7\frac{3}{5}$, quadratum erit $57\frac{19}{25}$ triplicatum $173\frac{7}{25}$: latus fere $13\frac{107}{131}$ pro diagonio dodecaedri. Itaque dimidiatum erit pro semidiagonio dodecaedri $6\frac{119}{131}$. Radius circularis deinceps invenietur sic. Si quadratum é latere decanguli tollatur á quadrato de latere quinquanguli, latus reliqui erit radius circuli per 9 & 6 e 18. Ut hic latus quinquanguli est $4\frac{2}{3}$, latus decanguli $2\frac{2}{5}$, quadrata autem sunt $21\frac{7}{9}$, $5\frac{19}{25}$: hujus ab illo subductione relinquitur $16\frac{4}{225}$: cujus latus est $4\frac{2}{15}$ pro radio circuli. Inventis semidiagonio dodecaedri & circuli radio restat altitudo. Tolle igitur circularis radii quadratũ $16\frac{4}{225}$ á semidiagonii quadrato $47\frac{12455}{17161}$, latus reliqui $31\frac{2714406}{3861225}$ est 54 pro altitudine, cujus una tertia est $\frac{5}{3}$. Basis quinquangula est fere 38, quæ per $\frac{5}{3}$ facit $63\frac{1}{3}$ pro soliditate unius pyramidis, quæ per 12 facit 760 pro soliditate totius dodecaedri.



16. *Solida plana tantum quinque sunt ordinata.*

Quod patet ex anguli solidi natura per species planarum figurarum. á duabus planis angulis non comprehenditur angulus solidus, ex tribus angulis trianguli ordinati est angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosaedri: é sex non potest: nam sex plani tales anguli valerent 12 tertias recti, id est quatuor rectos. At anguli plani facientes solidum sunt minores quatuor rectis per 8 e 22: é septem igitur & pluribus multo minus est possibile. E' quadratis tribus angulis comprehenditur angulus cubi, é quatuor non potest ob eandem caussam. E' tribus angulis quinquanguli ordinati est angulus dodecaedri, é quatuor non potest: nam singuli valent rectum & unam quintam. Itaque essent quatuor recti, & tres quintæ. E' pluribus igitur multo minus est possibile. Demonstratio hæc accurate sane & manifeste colligit, quamuis plana ordinata innumerabilia possint esse, attamen é generibus angulorum quinque tantum corpora ordinata institui posse, unde tetraedrum, octaedrum, icosaedrum, basi triangula, cubus quadrangula, dodecaedrum quinquangula componitur. Atque ita geometria Pythagoræ theologiam quandam ex iis quinque corporibus ordinatis reperit, tanquam mens illa summi dei sapientia que de fabricando mundo & ordinatis corporibus exornando cogitans stereometricam demonstrationis hujus ideam sibi proposuerit.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXVI. de sphæra.

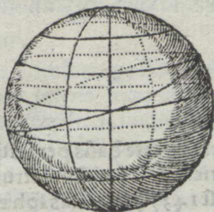
Solidum gibbum est quod comprehenditur á superficie gibba.
Sic antea planum á superficie plana definitum est.

2. *Estque*

2. *Estque sphæra aut varium.*

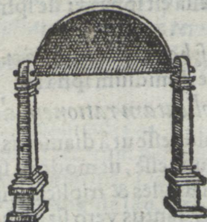
Partitio solidorum é superficiebus suis intelligitur.

3. *Sphæra est gibbum rotundum.*



Potuit etiam definiri quod á sphærico cōprehenditur. Corpus sphæricum, sphæra græce, latine globus appellatur: sed græcum verbum usitatum teneatur.

Sphæra fit conversione semicirculi manente diametro. 14 d 11.



Ut hic vides. Euclides hāc sphæræ fabricam proposuit, qualis antiquior est in superficie, analogia tamen respondet, & sphæram fieri conversione semicirculi intelligimus, dum concipimus inane spatium (quo semicirculus attigerit) corporari. Atq; ut antea de circulo in planis deque sphærico in gibbis, sic modo intelligatur sphæram in solidis esse ordinatissimam.

4. *Maximus sphæræ circulus est, qui sphæram bisecat.*

Hoc peripheriis sphæricis respondet ut proximum.

Circulus propior maximo major est remotiore.

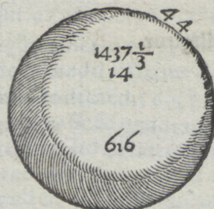
Aequi distantes á maximo sunt æquales.

Ut in superiore exemplo.

5. *Planus é diametro & sextante sphærici est sphæra.*

Ut antea circulo & sphærico, sic modo cubo & sphæræ sua analogia est. Cubica superficies comprehenditur sex basibus quadratis æqualibus, & sphæra

item cõ/prehen/ditur sex basi=bus sphæri/cis equalibus cu bicas ba ses ambientibus: Cubus efficitur multiplicata sexta parte basis per latus: & sphæra similiter efficitur multiplicata sexta sphærici parte per diametrum tanquam per latus. Sic planus é $\frac{616}{6}$ & 14 diametro est $1437\frac{1}{3}$ soliditas sphæræ. Itaque



1. *Ut 21 ad 11, sic cubus diametri ad sphæram.*

Ut hic cubus é 14 est 2744. facile enim fuit comparanti cubum 2744 cum sphæra deprehẽdere 2744 ad $1437\frac{1}{3}$ esse in minimis terminis ejusdẽ rationis, ut 21 ad 11. Ergo hæc geodæsia est sphæræ: de sphæræ sectore & sectione geodæsia postea erit. Et

2. *Planus é radio & sextante sphærici est hemisphærium.*

Sed accuratius est sumere dimidium sphæræ.

6. *Sphæræ habent triplicatam rationem diametrorum.* 18 p 12.

Sic antea dictum est circulos esse ut á diametris quadrata, quia essent plana similia, & diametros in circulis esse, ut modo in sphæris, homologa latera. Itaque cum sphæræ figuræ sint similes & triplicis dimensionis, habent rationem diametrorum triplicatam. Quantus vero sit usus propositionis hujus, astronomia insigne exemplum suppeditat de differentia solis & terræ. Nam cum Ptolemæus diametros solis & terræ deprehendisset esse ut 11 ad 2 ex triplicata ratione sphærarum reperit rationem solis ad terram esse 331 ad 8, id est solem majorem terra centies sexagies sexies & $\frac{3}{8}$. Copernicus (quia sol propius ad terram accessit á Ptolemæi tempore, milliaria germanica 9976, id est gallica 20952) deprehendit solem majorem esse terra centies sexagies sexies & $\frac{7}{8}$ ut prope semel amplius superet.

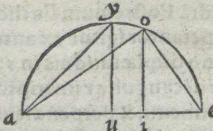
7. *Quinque corpora ordinata inscribuntur eidem sphæræ conversione semicirculi habentis pro diametro in tetraedro rectam potentem sesquialterum ad latus tetraedri, in quatuor ordinatis reliquis ordinati ipsius diagonium.*

Corporum planorum ordinatorum adscriptio est in sphæram, ut superficierum planarum antea fuit in circulum: trianguli & ordinati triangulati quadranguli, quinquanguli, sexanguli, decanguli, quindecanguli. Sed enim figuras illas planas geometres inscripsit & circumscripsit circulo. Corpora autem quinque ordinata & polyedrum præterea stereometris sphæræ duntaxat inscripsit: polyedrum

polyedrum in scholis reliquimus: ordinata tamen complectimur. Adscriptio igitur ista separatim tractatur á fabrica corporum ipsorum, ut in planis alio loco trianguli & quadrati fabrica instituitur: alio traditur adscriptio. Conversio autem ejusdem semicirculi sphæram omnibus communem efficit.

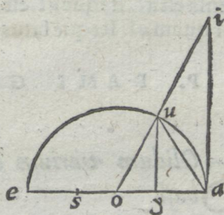
8. *E' ratione axis sphærici latera tetraedri, cubi, octaedri, dodecaedri deprehenduntur.*

Axis in tribus primis corporibus est rationalis ad latus, ut patuit: potest enim sesquialterum lateris tetraedrici, triplum cubici, duplum octaedrici. Itaque si axis *ae* secetur dupla ratione in *i*, & perpendicularis *io* connectatur ad *a* & *e* erunt latera *oa* tetraedri & *oe* cubi, ut patet per 2 c 4 e 8 & 1 c 15 e 4 & cubici lateris proportionaliter secti majus segmentum est latus dodecaedri per 15 e 24. Si axis idem bisecetur, ut in *u* & perpendicularis erigatur *uy*, connectaturque *ya*, connectens erit latus octaedri, ut patet item per 2 c 4 e 8 & 1 c 15 e 4. Latus icosaedri hoc modo habetur.



9. *Si recta æqualis axi sphærico, eique á termino perpendicularis connectatur ad centrum, recta á sectione peripheriæ ad dictum terminum erit latus icosaedri.*

Ut hic esto axis *ae*, diameter semicirculi *aue*, & *ai* æqualis ipsi axi, & perpendicularis á termino connectatur ad centrum per rectā *io*, recta á sectione *u* in *a* erit latus icosaedri: Ducatur ab *u* perpendicularis *uy*, hic duo triangula *iao*, & *uyo* sunt æquiangula per c 9 e 7. Itaque per 9 e 7 sicuti *ia* ad *ao*, sic *uy* ad *yo*. At *ia* est dupla ipsius *ao*. Itaque *uy* est dupla ipsius *yo*: potest itaque per 7 e 12 quadruplū, & ideo *uy* & *yo*, id est per 5 e 12 *uo*, id est rursus per 17 e 4 *ao* potest quintuplum *yo*: At *yo* est minor quā *oa*, id est quam *oe*: æqualis secetur *os*. Jam ut dimidia *ao* potest quintuplum dimidiæ *yo*, sic dupla *ae* poterit quintuplum duplæ *ys*. Itaque per 11 e 25 cum diagonius *ae* possit quintuplum ipsius *ys*, *ys* erit latus sexanguli inscripti circulo circumscribenti quinquangulum icosaedri: At perpendicularis *uy* æquatur ipsi *ys*, quia utraque dupla est ipsius *yo*. Quare *uy* est latus sexanguli: at *ay* est latus decanguli, æquatur enim ipsi *se*, quia si ab æqualibus radiis *oa* & *oe* tollantur æquales *oy* & *os*, relinquentur æquales *ya* & *se*: & diagonius icosaedri per 9 e 25 componitur é latere sexanguli utrinque continuato latere decanguli. Quare *ay* est latus decanguli. Postremo *ua* potens latera sexanguli & decanguli per 9 e 18 erit latus icosaedri.



10. *Ex ordinatis quinque corporibus eidem sphæræ inscriptis tetraedrum lateris magnitudine est primum, octaedrum secundum, cubus tertium, icosaedrum quartum, dodecaedrum quintum.*

Ut patebit si in unum recolligātur omnia sic. Nam *ai* latus tetraedri subtendit majorem peripheriam quam *ao* latus octaedri, & *ao* majorem quam *ie* latus cubi, quia subtendit dimidiam: & *ie* quam *ue* latus icosaedri, & *ue* quam *ye* latus dodecaedri. Postremum Euclides demonstrat operosius: Repetantur igitur ex antecedentibus sectiones axis primo duplæ rationis in *s*, & latus sexanguli *rl*, latusque decanguli *ar* inscriptorum eidem circulo icosaedri quinquangulum circumscribenti, & perpendiculares *is* & *ul*. Hic duo triangula *aie* & *ies* sunt per 4 e 8 similia, & ut *se* est ad *ei*, sic *ie* ad *ea* & per 1 c 15 e 4, ut *se* est ad *ea*, sic quadratum ex *se* ad quadratum ex *ei*, & inverse ut *ae* est ad *se*, sic quadratum ex *ie* est ad quadratum ex *se*. At *ae* est tripla ipsius *se*. Ergo quadratum ex *ie* est triplum quadrati ex *se*. At quadratum ex *as* per thesim & 7 e 12 est quadruplum quadrati ex *se*. Itaque etiam majus quadrato ex *ie*, rectaque *as* major quam *ie* & *al*, ideo multo major. At *al* per thesim componitur ex lateribus sexanguli & decanguli *rl* & *ar*. Ergo per 1 c 5 e 18 secatur proportionaliter, & majus segmentum est latus sexanguli ipsum *rl*, & majus segmentum ipsius *ie* proportionaliter item sectæ est *ye*: est igitur major ipsa *rl* quam *ye*, & ipsi *rl*, jam æqualis ostensa est *ul*. Itaque *ul* est major quam *ye*, sed *ue* latus icosaedri per 11 e 6 major quam *ul*. Itaque latus icosaedri multo majus est latere dodecaedri.

P. RAMI GEOMETRIAE LIB. XXVII.
de cono & cylindro.

Solidum varium est quod comprehenditur á superficie varia & basi.

Hic enim basis ad superficiem variam addenda est.

2. *Si varia habent axes diametris basium proportionales, sunt similia.* 24 d 11.

Consectarium est é 14 e 4. Hic enim axes & diametri sunt tanquam crura æqualium angulorum, nempe rectorum in basi & axe perpendiculari.

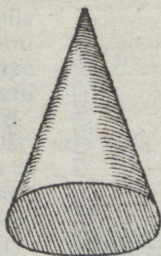
3. *Varium est conus aut cylindrus.*

Caussa partitionis é partitione superficierum intelligitur.

4. *Conus est quod á conico & basi comprehenditur.*

Hic basis

Hic basis est circulus.



Itaque

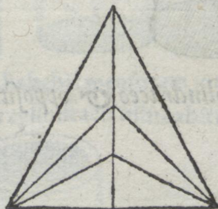
1. *Fit conversione trianguli rectanguli manente altero crure.*

Ut patet nempe é varii definitione. Hanc conifabricam proponit Euclides 18 d 11: nec alium conum videtur tum stereometria percepisse. Apollonius conum generaliter tractavit, & species recti atque obliqui distinxit, ideoque propter conicam doctrinam altius extructam magnus geometra dictus est, ut Geminus est author apud Euthocium.

Et

2. *Conus est rectangulus, si crus manens & æquale converso, obtusangulus si minus, acutangulus si majus. é 18 d 11.*

Hic conicæ altitudinis differentia triplex proponitur é triplici angulorum differentia, qua dimidiati coni vertex distinguitur: differentia tamen optica potius quam geometrica. Conus enim eminus videtur instar trianguli. Itaque pro differentia altitudinis apparet vertice rectangulo, obtusangulo, acutangulo: ut hic minimus conus est obtusangulus, medius rectangulus, summus acutangulus.



Caussa vero triplicis differentiæ in angulis é differentia crurum est é consectariis triplicis trianguli de recta bisecante basim, ut patet ad finem 8 lib.

Et

3. *Conus est prima figura variarum.*

Conus enim sic primus est in solidis variis, ut triangulum in planis rectilineis, ut pyramis in sodidis planis, neque in alia solida varia simpliciora dividi potest.

Et

4. Coni

4. *Coni æquealti sunt ut bases. Quæ est 11 p 12.*

Ut hic vides.





5. *Reciproci basi & altitudine sunt æquales. 15 p 12.*

Consectaria sunt é 12 & 13 e 4. Ut hic vides.





5. *Cylindrus est quod á cylindraceo & oppositis basibus comprehenditur.*

Hic enim circuli duo paralleli sunt bases circuli.

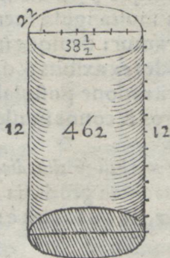


Fit conversione parallelogrammi rectanguli manente altero latere. 2 1 d 11.

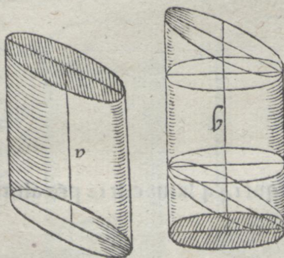
Ut patet ex eadem varii definitione.

Planus

6. *Planus é basi & altitudine est soliditas cylindri.*

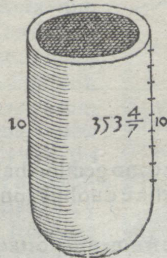


Geodæsia hic é prismate repetitur, ut si cylindri basis sit $38\frac{1}{2}$ ex ea & altitudine 12 soliditas cylindri est 462. Atque geodæsia respondet prismatis, omninoque parallelogrammi rectãguli geodæsiæ.



Si cylindr⁹ basib. oppositis sit obliquus, amputa de basi alteram & alteram tanto augeas, habebis mensuram totius, ut hic vides in cylindro *a*, *b*.

Hinc capacitas basis cylindracei æstimabitur. Inane enim tanquam plenum metiendum est, ut hic. Interioris circuli diameter 6 pedum, peripheria $18\frac{6}{7}$, area igitur $28\frac{2}{7}$, ex qua & altitudine planus est $282\frac{6}{7}$. Sic igitur æstimabis, ut antea quantum liquoris vel contenti cujuslibet pes cubicus occupet.



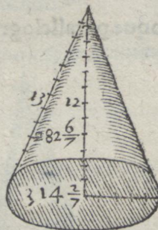
7. *Cylindrus est triplus coni basi & altitudine æqualis.* 10 p 12.

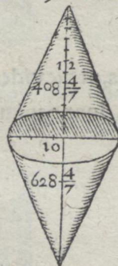
De labyrintho Euclideæ demonstrationis ad hanc propositionem dicetur in scholis. Ratio cylindri ad conum simpliciter potius assumatur é ratione prisma

tis ad pyramidem. Cylindrus enim prismatis, ut conus pyramidis speciem imitatur: quin intra eadem latera prisma, cylindrusque pyramis & conus esse possunt: & si prisma pyramisque basis admodum multangulæ fuerint, eadem figura prisma & cylindrus, pyramis & conus videantur: denique intra eadem latera, ut coni cylindrique, sic prisma & pyramides ex axibus & diametris basium similitudinem habeant, tamque geometrica ratione postulabitur cylindrum coni triplum esse, quam postulatur cylindros & conos similes esse, quorum axes sunt diametris basium proportionales. *Itaque*

1. *Planus é cylindri basi & triente altitudinis est soliditas coni basi & altitudine æqualis.*

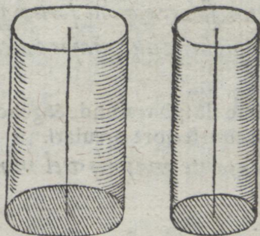
E' triplicitate cylindri sequitur geodæsia coni, ut antea geodæsia pyramidis fuit é triplicitate prismatis. Altitudo autẽ habetur. Si quadratũ é radio basis tollatur á quadrato de latere, latus reliqui erit altitudo, ut patet per 5 e 12. Hic igitur ê radio 5 quadratũ 25 tollatur é quadrato 169 de latere 13, reliqui 144 latus erit 12 pro altitudine, ex cujus tertia 4 & basi circulari $78\frac{4}{7}$ planus est $314\frac{2}{7}$ pro coni soliditate. Analogia autem conici ad cylindraceum non respondet, ut subtriplum sit conicum cylindracei, sicuti conus est subtriplus cylindri: é cono gemino basis communis fit rhombus archimedeus, ut hic, cujus geodæsia é duobus conis erit.





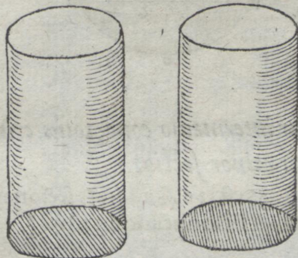
2. *Cylindri æquealti sunt ut bases. 11 p 12.*

Cylindracea forma sacci sunt, quibus fere frumentũ portatur. Si quis igitur agricola saccum frumenti vicino commodarit, in cujus basi diameter sit 4 pedum, tandemque vicinus pro uno sacco reddat quatuor æquealtos, & in basi pedalis



pedalis diametri videbitur fortasse commodatum reddidisse æquali mensura, altitudine videlicet & basi. At magnam differentiam quadrata è quatuor singularibus diametris 1,1,1,1, id est 4 ad quadratum 16 e 4 commodati diametri. Circuli nempe sunt ut á diametris quadrata, per 2 e 15. Itaque fraus esset 12, id est tripli.

3. *Reciproci basi atque altitudine sunt æquales.* 15 p 12.



Hæc enim utraque affectio figuris primarum æque multiplicibus attributa est.

Si cylindrus secatur plano basibus oppositis parallelo, segmenta sunt ut axes. 13 p 12.



Ut hic vides. Axes enim sunt altitudines. Consectarium item est ê generali theoremate primarum figurarũ, sed paulo secus propositum de altitudine, tanquam generale fuisset, Aequalis basis primas figuras esse, ut altitudines. Respondet autem 4 c 5 e 23. Inæquales sectiones sphæræ huc nobis rejectæ sunt, quia comprehenduntur á superficie tum sphærica tum conica, ut sector: item á plana & sphærica, ut sectio, & in utroque sicut in circulo segmentũ ipsum majus minusque dicitur, & sector in centro ut antea consideratur.

8. *Sector sphæræ est segmentum sphæræ, quod foris á sphærico, intus á conico in centrum terminato comprehenditur, major concavo, minor convexo.*

Archimedi tales sectores sunt primo de sphæra, unde & geodæsia reliqua sumpta est, & hic analogia quædam est cum sectore circulari.

9. *Planus é diametro & sextante majoris vel minoris sphærici est sector major vel minor.*

Ut hic é diametro 14 & $4\frac{2}{3}$ (quæ est una sexta sphærici majoris) planus est $1026\frac{2}{5}$ pro soliditate majoris sectoris. Sic ex eadẽ diametro 14 & $29\frac{1}{3}$ quæ est $\frac{1}{5}$ de 176 minore sphærico planus est $410\frac{2}{3}$ pro soliditate minoris sectoris. Atque hinc postremo soliditas sectionis oritur additione & subductione.

10. *Si major sector augeatur intermedio cono, totus erit major sectio: si minor minuatur, reliquus erit minor sectio.*

Ut hic conus intermedius dimensus est $126\frac{4}{63}$ additus sectori majori componit $2152\frac{46}{63}$: ac idem detractus minori sectori relinquit $284\frac{38}{63}$.

F I N I S.

BASILEAE, PER EUSEBIUM EPISCOPIUM, *& Nicolai fratris hæredes. Anno Salutis humanæ* M. D. LXIX.